المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum Development

# الرياضيات

## الصف الحادي عشر- الفرع الأدبي

### الفصل الدراسي الثاني

## 11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

نور محمد حسان　　　　إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　06-5376266　P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor　feedback@nccd.gov.jo　www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هـذا الكتـاب في مـدارس المملكـة الأردنيـة الهاشـمية جميعهـا، بناءً عـلى قرار المجلـس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج في جلسـته رقـم (2021/5)، تاريـخ 2021/12/7 م، وقـرار مجلـس التربيـة والتعليم رقـم (2021/169) تاريـخ 2021/12/21 م بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2021 / 2022 م.


- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
**ISBN: 978 - 9923 - 41 - 386 - 9**

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2083)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر: الفـرع الأدبـي: كتاب الطالـب: (الفصـل الدراسـي الثانـي)/ المركـز الوطنـي لتطوير المناهـج.–ط2؛ مزيـدة ومنقحة.– عمـان: المركـز، 2022

ج2(90) ص.

ر.إ.: **2022/4/2083**

**الواصفات: / تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/**

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.


British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

**الطبعة الأولى (التجريبية)** 1442 هـ / 2021 م
**أعيدت طباعته** 1443 هـ / 2022 م

# المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـمية الراسـخ بأهمية تنمية قدرات الإنسـان الأردني، وتسـليحه بالعلم والمعرفة؛ سـعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمسـتواهم المعرفي والمهاري، ومجـاراة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسـية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشـكلات، فقـد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضـل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعـي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واسـتخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغْيَةَ إعداد الطلبة للدراسـة الجامعية إعدادًا جيِّـدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضًا تقديم الموضوعات بطريقة منظمة جاذبة ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشـادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاسـة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي امتلكوها سـابقًا، وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسـائلها بسـياقات حياتية تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسـائل نهجٌ ناجعٌ في ترسـيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّـن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهـدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

**المركز الوطني لتطوير المناهج**

# قائمة المحتويات

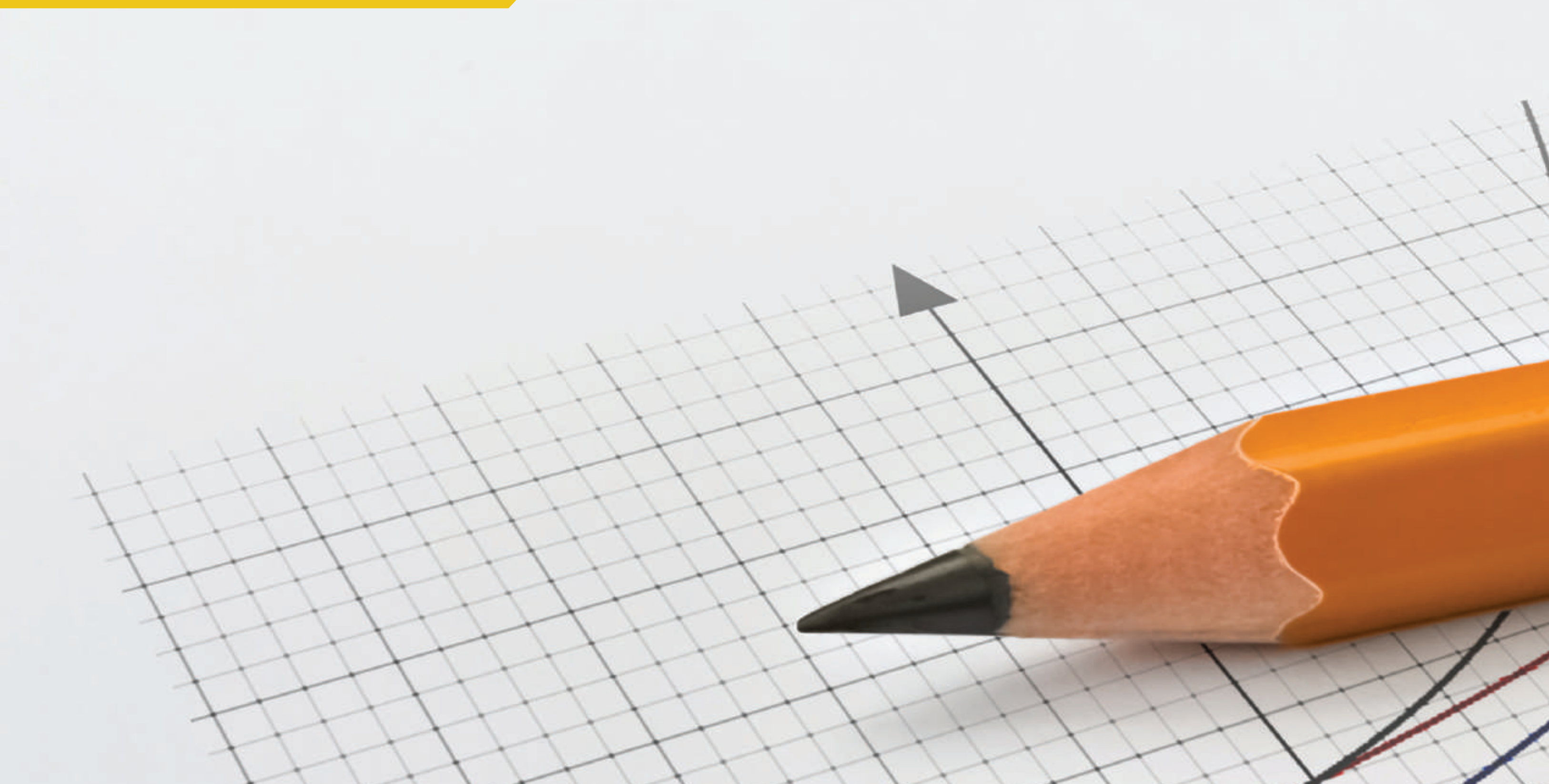
# قائمة المحتويات

الوحدة
4

# الاقترانات المتشعبة
# Piecewise Functions


## ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل الاقترانات المتشعبة واقترانات القيمة المطلقة لنمذجة مواقف حياتية كثيرة، مثل: حساب أثمان المياه والكهرباء وَفق شرائح الاستهلاك المختلفة، وإيجاد قِيَم ضريبة الدخل تبعًا لشرائح الدخل المُتعدِّدة. سأتعلَّم في هذه الوحدة تمثيل هذه الاقترانات بيانيًّا، وأتعرَّف كثيرًا من خصائصها، مثل: المجال، والمدى.



## تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- ✓ تحديد المجال والمدى للاقترانات النسبية.
- ✓ إيجاد معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع من تمثيل بياني معطى.

## سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- الاقتران المتشعب ومجاله ومداه.
- إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة بوصفه اقترانًا متشعبًا.
- تمثيل الاقتران المتشعب واقتران القيمة المطلقة بيانيًّا.
- نمذجة مواقف حياتية باستعمال الاقتران المتشعب.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (6) و (7) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

# الدرس 1

# الاقترانات المتشعبة
# Piecewise Functions

**فكرة الدرس** تعرُّف الاقتران المتشعب، وتمثيله بيانيًّا، وتحديد مجاله ومداه.

**المصطلحات** الاقتران المتشعب.

**مسألة اليوم** اتفقت مريم مع إحدى دور النشـر على بيع كتاب لها لقاء حصولها على ما نسبته 10% من قيمة مبيعات أول 10000 نسخة من الكتاب، و15% من قيمة أيِّ مبيعات إضافية. إذا كان ثمن الكتاب الواحد JD 7، فما المبلغ الذي ســتأخذه مريم بعد بيع 12000 نسخة؟

يُســمّى الاقتــران المُعــرَّف بقواعــد مختلفــة لأجــزاء مجالــه **اقترانـًـا متشــعبًا** (piecewise function). فالاقتران المتشعب هو اقتران يدمج بين قاعدتي اقترانين أو أكثر.

**لغة الرياضيات**

تُعرَف الاقترانات المتشعبة أيضًا بالاقترانات المُعرَّفة بأكثر من قاعدة.

**مثال 1**

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x+1 & , -2 \le x < 1 \\ 3 & , x \ge 1 \end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

**1** أُحدِّد مجال $f(x)$.

أُلاحِظ أنَّ الاقتران مُعرَّف بقاعدتين، هما:

- $f(x) = x+1$: تُستعمَل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-2 \le x < 1$.
- $f(x) = 3$ : تُستعمَل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \ge 1$.

إذن، مجال $f(x)$ هو الفترة $[-2, \infty)$.

**2** أجد قيمة $f(-2)$.

العدد $-2$ ينتمي إلى الفترة $[-2, 1)$. إذن، أستعمل القاعدة الأولى:

$f(x) = x + 1$ القاعدة الأولى

**أتذكَّر**

العــدد $b$ لا ينتمــي إلى الفترة $[a, b)$ التي تُكافِئ المتباينــة: $a \le x < b$، لكنَّــه ينتمي إلــى الفترة $[b, \infty)$ التــي تُكافِــئ المتباينة: $x \ge b$.

$f(-2) = -2 + 1$ بتعويض $x = -2$

$= -1$ بالتبسيط

**3** **أجد قيمة $f(0)$.**

العدد 0 ينتمي إلى الفترة $[-2, 1)$. إذن، أستعمل القاعدة الأولى:

$f(x) = x + 1$ القاعدة الأولى

$f(0) = 0 + 1$ بتعويض $x = 0$

$= 1$ بالتبسيط

**4** **أجد قيمة $f(2)$.**

العدد 2 ينتمي إلى الفترة $[1, \infty)$. إذن، أستعمل القاعدة الثانية:

$f(x) = 3$ القاعدة الثانية

$f(2) = 3$ بتعويض $x = 2$

**5** **أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.**

**أتذكَّر**

بما أنَّ الاقتران: $f(x) = x+1$ هو اقتران خطي، فإنَّه يُكتفى بنقطتين لتمثيله بيانيًّا.

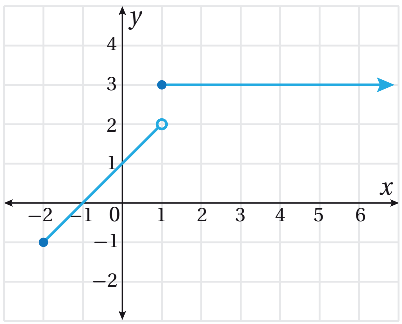
**الخطوة 1:** أُمثِّل $f(x) = x + 1$ عندما $-2 \leq x < 1$.

أجد قيمة الاقتران الخطي: $f(x) = x + 1$ عند طرفي مجاله؛ أيْ عندما $x = 1$، وعندما $x = -2$، وذلك باستعمال جدول على النحو الآتي:

| $x$ | $-2$ | $1$ |
|---|---|---|
| $y = x + 1$ | $-1$ | $2$ |
| $(x, y)$ | $(-2, -1)$ | $(1, 2)$ |

أُعيِّن النقطة $(1, 2)$ والنقطة $(-2, -1)$ في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينهما بقطعة مستقيمة. بما أنَّ العدد $-2$ يُحقِّق المتباينة (توجد مساواة في رمز المتباينة من جهة العدد $-2$)، فإنَّني أبدأ التمثيل بدائرة مُظلَّلة عند النقطة $(-2, -1)$. أمّا العدد 1 فهو لا يُحقِّق المتباينة (لا توجد مساواة في رمز المتباينة من جهة العدد 1؛ لذا أُنهي التمثيل بدائرة غير مُظلَّلة (مُفرَّغة) عند النقطة $(1, 2)$.

**الخطوة 2 :** أُمثِّل $f(x)=3$ عندما $x\geq 1$.



أُلاحِظ أنَّ $f(x)=3$ هو اقتران ثابت؛ لذا يُمثَّل بشعاع أفقي يبدأ عند النقطة $(1,3)$ بدائرة مُظلَّلة (مغلقة)؛ نظرًا إلى وجود مساواة في رمز المتباينة كما في الشكل المجاور.

من التمثيل البياني للاقتران، أُلاحِظ أنَّ مداه هو: $[-1,2)\cup\{3\}$.

**أتذكَّر**

مدى الاقتران هو مجموعة القِيَم التي يتخذها على المحور $y$.

### أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x<1 \\ 3-x & ,x>1 \end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

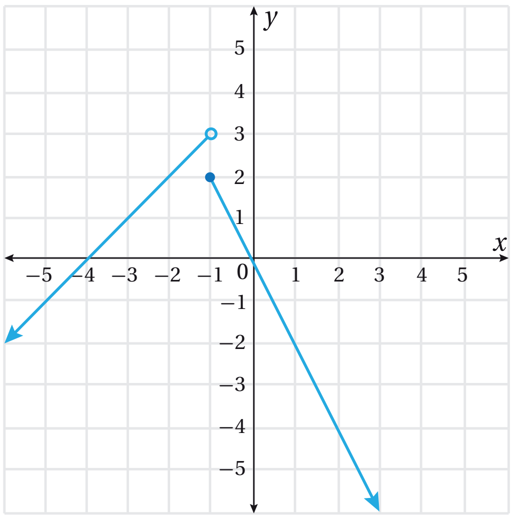
a) أُحدِّد مجال $f(x)$.

b) أجد قيمة كلٍّ من: $f(-1)$، و $f(1)$، و $f(3)$.

c) أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.

يُمكِن أيضًا إيجاد قاعدة الاقتران المتشعب إذا أُعطِي تمثيله البياني.

### مثال 2



**أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.**

أكتب الاقتران الذي يُمثِّل كل جزء في التمثيل البياني:

**الخطوة 1:** أكتب قاعدة الاقتران الذي يُمثِّل الجزء الأيسر من التمثيل البياني، وهو شعاع يمرُّ بالنقطتين: $(-2,2)$، و $(-4,0)$،

وميله: $m=\dfrac{2-0}{-2+4}=\dfrac{2}{2}=1$.

**أتذكَّر**

ميل المستقيم المار بالنقطتين: $(x_1,y_1)$، و $(x_2,y_2)$ هو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ومعادلته بصيغة الميل $m$ والمقطع $b$ من المحور $y$ هي:

$$y=mx+b$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ معادلة الشعاع بصيغة الميل والنقطة هي: $y - 2 = 1(x + 2)$، ويُمكِن إعادة كتابتها في صورة: $f(x) = x + 4$.

أمّا وجود دائرة غير مُظلَّلة عند النقطة $(-1,3)$ فيعني أنَّ هذه القاعدة تُقابِل الفترة $(-\infty,-1)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

**الخطوة 2 :** أكتب قاعدة الاقتران الذي يُمثِّل الجزء الأيمن من التمثيل البياني، وهو شعاع يمرُّ بالنقطتين: $(0,0)$، و $(-1,2)$، وميله: $m = \dfrac{0-2}{0+1} = -2$.

بما أنَّ الشعاع يقطع المحور $y$ عند الصفر $(b=0)$، فإنَّ معادلته بصيغة الميل والمقطع هي:

$$f(x) = -2x \quad \text{أو} \quad y = -2x$$

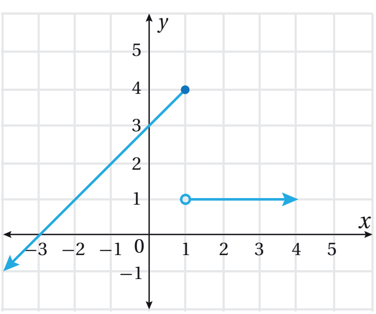
أمّا وجود دائرة مُظلَّلة عند طرف الشعاع الذي يبدأ بالنقطة $(-1, 2)$ فيعني أنَّ هذه القاعدة تُقابِل الفترة $[-1, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن، قاعدة هذا الاقتران هي:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & , x < -1 \\ -2x & , x \geq -1 \end{cases}$$

### أتحقَّق من فهمي

**أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.**




### أتعلَّم

بالرغم من وجود دائرة غير مُظلَّلة عند النقطة $(-1,3)$، فإنَّه يُمكِن استعمالها مع نقطة أُخرى مثل $(-4,0)$ لإيجاد الميل، حيث:

$$m = \frac{0-3}{-4+1} = \frac{-3}{-3} = 1$$

### أتذكَّر

المتباينة: $x < a$ تُكافِئ الفترة $(-\infty, a)$، والمتباينة: $x \geq a$ تُكافِئ الفترة $[a, \infty)$.

### أتذكَّر

الشعاع الأفقي أو القطعة المستقيمة الأفقية في التمثيل البياني يُمثِّلان اقترانًا ثابتًا.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال الاقترانات المتشعبة؛ ذلك أنَّ هذه الاقترانات تصف تلك المواقف، وتُلخِّصها على نحوٍ سهل يساعد على فهمها، وإجراء الحسابات المُتعلِّقة بها.

## مثال 3 : من الحياة

**حـــدَّد مصنع للخياطة أجر العاملين والعاملات فيه بالســـاعة، وذلك بدفع JD 2 عن كل ســـاعة عمل لأول 40 ســـاعة من العمل أســـبوعيًّا، ثم دفع JD 3 عن كل ســـاعة عمل أكثر من ذلك. أكتب اقترانًا يســـاعد محاســـب المصنـــع على تحديد الأجرة لكل مَنْ عمل $x$ ساعة في الأسبوع.**

توجد قاعدتان لحساب الأجرة الأسبوعية، تبعًا لعدد ساعات العمل:

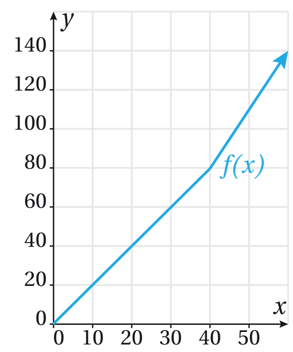
- إذا كان عدد ســـاعات العمل أقل من 40 ســـاعة، فإنَّ الأجرة تساوي ناتج ضرب عدد هذه الساعات في JD 2.
- إذا كان عدد ســـاعات العمل أكثر من 40 ســـاعة، فـإنَّ الأجرة تســـاوي ناتج ضرب عدد الساعات الزائدة على 40 ساعة في JD 3، مضافًا إلى ذلك أجرة أول 40 ساعة عمل.

أُعبِّر عن كلتا القاعدتين بالرموز كما يأتي:

| عدد الساعات | الأجرة |
|---|---|
| $0 \leq x \leq 40$ | $2x$ |
| $x > 40$ | $3(x-40)+2(40) = 3x-40$ |

إذن، الأجرة لكل مَنْ عمل $x$ ســـاعة في الأســـبوع تعطى بالاقتران المتشعب الآتي الذي يظهر تمثيله البياني جانبًا:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 40 \\ 3x - 40 & , x > 40 \end{cases}$$




### أتحقَّق من فهمي

**قرَّرت إدارة أحد المستشفيات الخاصة زيادة الرواتب الشهرية للأطباء والطبيبات وَفق الأسس الآتية:**

- **زيادة الرواتب التي تقل عن JD 700 بنسبة 15%.**
- **زيادة الرواتب التي تتراوح بين JD 700 وأقل من JD 1000 بنسبة 10%.**
- **زيادة الرواتب التي تبلغ JD 1000 فأكثر مبلغ JD 50.**

**أكتب اقترانًا متشـــعبًا يُمكِن اســـتعماله لإيجـــاد الراتب الجديد لأيِّ طبيـــب أو طبيبة في هذا المستشفى.**

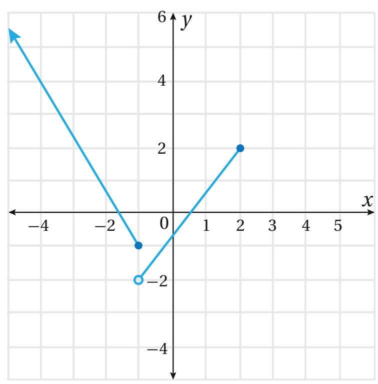
### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}3x-4 & ,x\geq 1\\ 2 & ,x<1\end{cases}$، وكان: $g(x)=\begin{cases}2x+1 & ,-3\leq x<0\\ 2x-1 & ,x>0\end{cases}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

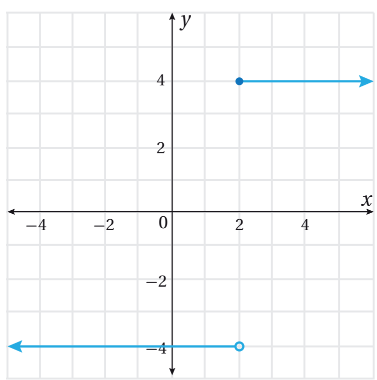
1. أُحدِّد مجال كلٍّ من: $f(x)$، و $g(x)$.
2. أجد قيمة كلٍّ من: $f(-1)$، و $f(2)$، و $g(0)$، و $g(-2)$.
3. أُمثِّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.
4. أُمثِّل الاقتران $g(x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مداه.

**أكتب قاعدة الاقتران المتشعب المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:**

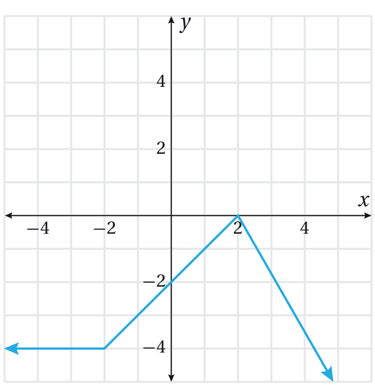
6



5



**مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُمثِّل منحنى الاقتران المتشعب $h(x)$، أُجيب عن السؤالين الآتيين:**



7. أُحدِّد مجال الاقتران $h(x)$، ومداه.
8. أجد قيمة كلٍّ من: $h(-3)$، و $h(0)$، و $h(3)$، و $h(6)$.

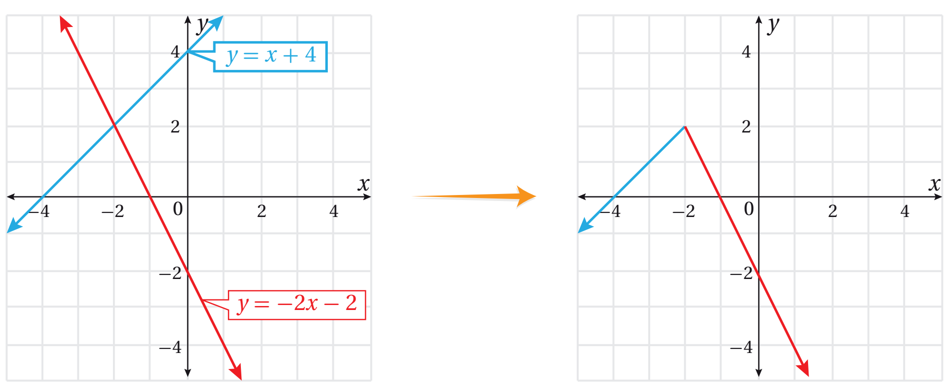
9. **توفير:** أراد الوالد أنْ يُحفِّز ابنته سعاد على توفير جزء من مصروفها اليومي، فقرَّر منحها مبلغًا يساوي ما ستُوفِّره نهاية كل شهر في حال لم يتجاوز مبلغ التوفير JD 5. أمّا إذا زاد على ذلك، فإنَّه سيمنحها JD 10. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمكِن استعماله لتمثيل هذا الموقف.

**10** **أعمال:** يعمل مندوب مبيعات لدى شركة لقاء راتب شهري مقداره JD 500، وعمولة شهرية نسبتها 1% عن أول JD 2000 لثمن مبيعاته. وفي حال زادت المبيعات الشهرية على JD 2000، فإنَّه يستحق عمولة نسبتها 1.5% عن المبلغ الذي يزيد على JD 2000. أكتب اقترانًا متشعبًا يُمكِن استعماله لحساب الدخل الشهري لمندوب المبيعات.

**11** أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

## مهارات التفكير العليا

**12** **تبرير:** ادَّعَتْ سارة أنَّه يُمكِنها تمثيل الاقتران المتشعب: $f(x)=\begin{cases} x+4 & , x<-2 \\ -2x-2 & , x\geq -2 \end{cases}$ بسهولة، وذلك بتمثيل كلٍّ من قاعدتيه بيانيًّا، وافتراض أنَّ مجال كلٍّ منهما على حِدَة هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، ثم محو أجزاء المنحنى التي تقع خارج المجال المُحدَّد في الاقتران المتشعب كما في الشكل الآتي. هل ادِّعاء سارة صحيح؟ أُبرِّر إجابتي.




**13** **مسألة مفتوحة:** أكتب اقترانًا متشعبًا $f(x)$، بحيث $f(-2)=f(-1)=3$، و $f(2)=f(3)=5$.

**14** **تحدٍّ:** أُمثِّل الاقتران المتشعب: $h(x)=\begin{cases} 3 & , x=1 \\ 2-x & , x\neq 1 \end{cases}$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.

الدرس 2

# اقتران القيمة المطلقة

## Absolute Value Function

**فكرة الدرس** تعرُّف اقتران القيمة المطلقة، وتمثيله بيانيًّا، وتحديد مجاله ومداه.

**المصطلحات** اقتران القيمة المطلقة، الرأس.

**مسألة اليوم** مُثِّلت الواجهة الأمامية لخيمة بمثلث في مستوى إحداثي، تُمثِّل فيه كل وحدة مترًا واحدًا. إذا كان رأس المثلث عند النقطة $(1, 3.5)$، وطرفا قاعدته عند النقطة $(-0.5, 0)$، والنقطة $(2.5, 0)$، فأجد اقتران القيمة المطلقة الذي يُمثِّل واجهة الخيمة.

يُسمّى الاقتران الذي يحوي قيمة مطلقة لمقدار جبري **اقتران القيمة المطلقة** (absolute value function)، ومن أمثلته:

$f(x)=|x+2|$ , $g(x)=|2x-4|-1$ , $h(x)=-|x|+3$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ القيمة المطلقة (يُرمَز إليها بالرمز $|x|$) لأيِّ عدد حقيقي $x$ تساوي بُعْده عن الصفر على خط الأعداد. وبما أنَّ البُعْد لا يكون سالبًا، فإنَّ $|x| \geq 0$؛ لذا يُمكِن كتابة $|x|$ في صورة اقتران متشعب كما يأتي:

$$|x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

يُمكِن أيضًا إعادة كتابة أيِّ اقترانِ قيمةٍ مطلقةٍ في صورة اقتران متشعب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، وهو ما يُسمّى **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**.

**أتذكَّر**

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي السالب تُلغي الإشارة السالبة، وتجعلها موجبة، مثل:

$|-5| = |+5| = 5$

### مثال 1

**أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x)=|3x-6|$، ثم أجد كُلًّا من $f(-1)$ و $f(4)$.**

لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة $f$، أتبع الخطوات الآتية:

**الخطوة 1:** أجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة.

$3x - 6 = 0$ بجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا

$3x - 6 + 6 = 0 + 6$ بإضافة 6 إلى طرفي المعادلة

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

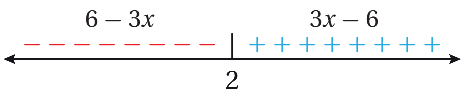
$x = 2$ بالتبسيط

**الخطوة 2 :** أُعيِّن جذر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه.

أُعيِّن العدد 2 على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشــارة علــى جانبيه، بتعويض أيِّ قيمة أقل من 2 (مثل 0) في المقدار الجبري: $3x-6$، فيكون دائمًا ناتج التعويض ســالبًا؛ ما يعني أنَّ إشــارة المقدار سالبة يسار العدد 2، بعد ذلك أُعوِّض أيَّ قيمة أكبر من 2 (مثل 4) في المقدار الجبري: $3x-6$، ويكون دائمًا ناتج التعويض موجبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار موجبة يمين العدد 2:


**الخطوة 3 :** أكتب قاعدتي الاقتران بحسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتب ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو من دون تغيير في الجزء الموجب، ثم أكتب في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروبًا في $-1$:




**الخطوة 4 :** أكتب قاعدة الاقتران المتشعب (من دون استعمال رمز القيمة المطلقة).

$$f(x) = \begin{cases} 6-3x & , x < 2 \\ 3x-6 & , x \geq 2 \end{cases}$$

لإيجاد كلٍّ من: $f(-1)$، و$f(4)$، أُعوِّض في القاعدة المناسبة:

$f(-1) = 6 - 3(-1)$ بتعويض $x = -1$ في القاعدة الأولى؛ لأنَّ $-1<2$

$= 9$ بالتبسيط

$f(4) = 3(4) - 6$ بتعويض $x = 4$ في القاعدة الثانية؛ لأنَّ $4>2$

$= 6$ بالتبسيط

### أتعلَّم

يُمكِــن أيضًــا كتابــة الاقتــران $f(x)$ علــى النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 6-3x & , x \leq 2 \\ 3x-6 & , x > 2 \end{cases}$$

ولكنْ جــرت العادة أنْ يوضَع رمز المســاواة عند رمز أكبر ($>$).

### أتحقَّق من فهمي

**أُعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $h(x)=|2x+8|$.**

التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة في صورة: $f(x) = a|mx+b| + c$، حيث: $a \neq 0$، و $m \neq 0$، يتكوّن من شعاعين على شكل ∨ أو ∧ متماثلين حول المحور: $x = \frac{-b}{m}$.

**رأس** (vertex) منحنى الاقتران هو النقطة التي يصل عندها منحناه إلى أعلى قيمة أو أقل قيمة، وإحداثياها $(-\frac{b}{m}, c)$.

يُمكِن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا باستعمال محور التماثل والرأس.

### مثال 2

**أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:**

**1** $f(x)=|x|$

**الخطوة 1:** أجد إحداثيي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

أُقارِن الاقتران: $f(x)=|x|$ بالصيغة: $f(x) = a|mx+b|+c$، فأُلاحِظ أنَّ:

$$a = 1, b = 0, c = 0, m = 1$$

أجد إحداثيي نقطة الرأس:

| | |
|---|---|
| إحداثيا نقطة الرأس | $(\frac{-b}{m}, c)$ |
| بتعويض $b = 0, m = 1, c = 0$ | $= (\frac{0}{1}, 0)$ |
| بالتبسيط | $= (0, 0)$ |

أجد معادلة محور التماثل:

| | |
|---|---|
| معادلة محور التماثل | $x = \frac{-b}{m}$ |
| بتعويض $b = 0, m = 1$ | $x = \frac{0}{1}$ |
| بالتبسيط | $x = 0$ |

**أتعلَّم**

تُمثِّل المعادلة: $x = 0$ المحور $y$.

**الخطوة 2 :** أُحدِّد قيمتين للمُتغيِّر $x$ حول محور التماثل، ثم أجد صورة كلٍّ منهما.

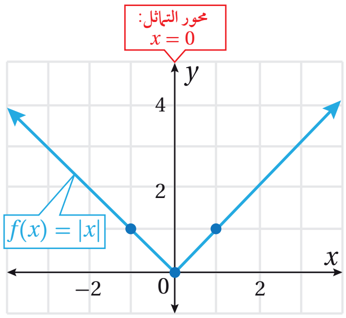
بما أنَّ محور التماثل: $x = 0$ ، فإنَّني أختار قيمة للمُتغيِّر $x$ أكبر من 0 (مثل 1)، وقيمة أُخرى أقل من 0 (مثل $-1$)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران كما في الجدول الآتي:

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f(x)=\|x\|$ | $1$ | $1$ |
| $(x, y)$ | $(-1, 1)$ | $(1, 1)$ |

**الخطوة 3 :** أُمثِّل الاقتران بيانيًّا.

أُمثِّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، ثم أصل بين النقاط الثلاث على شكل ٧.

أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنَّ المدى هو $[0, \infty)$.




**2** $f(x) = -|x-1|+2$

**الخطوة 1 :** أجد إحداثيي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

أُقارِن الاقتران: $f(x)=-|x-1|+2$ بالصيغة: $f(x) = a|mx+b|+c$، فأُلاحِظ أنَّ:

$$a = -1, b = -1, c = 2, m = 1$$

أجد إحداثيي نقطة الرأس:

$$\left(\frac{-b}{m}, c\right)$$ إحداثيا نقطة الرأس

$$= \left(\frac{-(-1)}{1}, 2\right)$$ بتعويض $b = -1, m = 1, c = 2$

$$= (1, 2)$$ بالتبسيط

أجد معادلة محور التماثل:

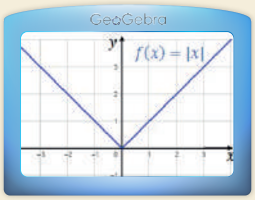
$$x = \frac{-b}{m}$$ معادلة محور التماثل

$$x = \frac{-(-1)}{1}$$ بتعويض $b = -1, m = 1$

$$x = 1$$ بالتبسيط

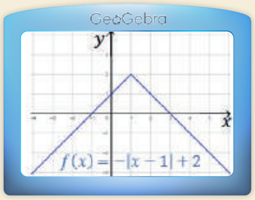
### أتعلَّم

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x) = |x|$، وذلك بكتابة $f(x) =$ في شريط الإدخال، ثم نقر $|\square|$ في لوحة المفاتيح، وكتابة $x$ بين خطي القيمة المطلقة، ثم الضغط على زرِّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:




### أتعلَّم

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران: $f(x) = -|x-1|+2$، وذلك بكتابة قاعدة الاقتران في شريط الإدخال، ثم الضغط على زرِّ الإدخال (ENTER)، فيظهر التمثيل البياني كما يأتي:



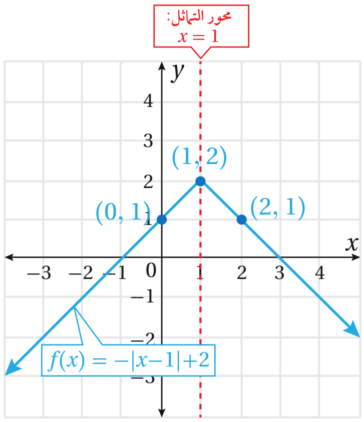
**الخطوة 2:** أُحدِّد قيمتين للمُتغيِّر $x$ حول محور التماثل، ثم أجد صورة كلٍّ منهما.

بما أنَّ محور التماثل: $x = 1$، فإنَّني أختار قيمة للمُتغيِّر $x$ أكبر من 1 (مثل 2)، وقيمة أُخرى أقل من 1 (مثل 0)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران كما في الجدول الآتي:

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $f(x) = -\|x-1\| + 2$ | 1 | 1 |
| $(x, y)$ | (0, 1) | (2, 1) |

**الخطوة 3:** أُمثِّل الاقتران بيانيًّا.

أُمثِّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، ثم أصل بين النقاط الثلاث على شكل ∧.




أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنَّ المدى هو $(-\infty, 2]$.

**أتعلَّم**

يكون منحنى اقتران القيمة المطلقة في صورة: $f(x) = a|mx+b| + c$, $m \neq 0, a \neq 0$، مفتوحًا إلى أعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى أسفل إذا كانت $a < 0$.

**أتحقَّق من فهمي**

**أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:**

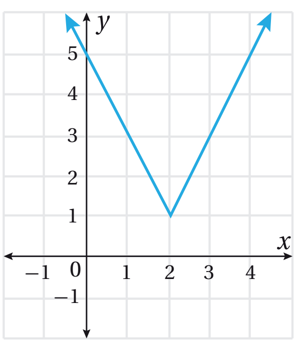
1) $f(x) = -|2x|$

2) $f(x) = |x - 3| + 2$

يُمكِن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطي إذا أُعطِي تمثيله البياني.

## مثال 3

**أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.**




**الخطوة 1:** أجد ميل المعادلة الخطية داخل رمز المطلق.

يتبيَّن من الشكل أنَّ التمثيل البياني هو لاقتران قيمة مطلقة خطي؛ لأنَّه على شكل ∨؛ لذا يُمكِن كتابة قاعدته كما يأتي: $f(x) = a|mx+b|+c$، حيث $m$ ميل المستقيم: $y = mx+b$.

أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ الشعاع الأيمن يمرُّ بالنقطتين: (3,3)، و(4,5). وبذلك، فإنَّ ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-3} = \frac{2}{1} = 2$$

**الخطوة 2:** أجد إحداثيي الرأس، ثم أُعوِّض الميل وإحداثيي الرأس في قاعدة الاقتران.

إحداثيا الرأس هما: $(-\frac{b}{m}, c)$، والتمثيل البياني يُظهِر أنَّ النقطة (2,1) تُمثِّل رأس الاقتران.

بالمقارنة، أستنتج أنَّ $c = 1$، ثم أجد قيمة $b$ من الإحداثي $x$ للراس:

| | |
|---|---|
| الإحداثي $x$ للرأس | $\frac{-b}{m} = 2$ |
| بتعويض $m = 2$ | $\frac{-b}{2} = 2$ |
| بالضرب التبادلي | $-b = 4$ |
| بالقسمة على $-1$ | $b = -4$ |

بتعويض قيمة كلٍّ من: $m$، و$b$، و$c$ في قاعدة الاقتران، فإنَّ:

$$f(x)=a|2x-4|+1$$

**الخطوة 3:** أجد قيمة $a$.

لإيجاد قيمة $a$، أُعوِّض في قاعدة الاقتران الناتجة من الخطوة السابقة إحداثيي نقطة تقع على منحنى الاقتران، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

| | |
|---|---|
| قاعدة الاقتران | $f(x) = a\|2x - 4\| + 1$ |
| بتعويض $(0, 5)$ | $5 = a\|2(0) - 4\| + 1$ |
| بالتبسيط | $5 = 4a + 1$ |
| بحَلِّ المعادلة الخطية | $a = 1$ |

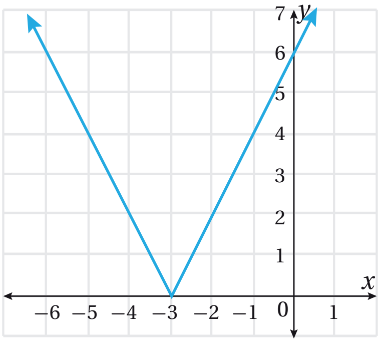
إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x)=|2x-4|+1$

### أتعلَّم

مـن السـهل تعويـض نقطة تقاطـع الاقتران مع المحور $y$ لإيجاد قيمة $a$؛ لأنَّ قيمة $x$ عندها تساوي صفرًا، علمًـا بأنَّه يُمكِن تعويـض أيِّ نقطة أُخرى تقع علـى التمثيل البياني للاقتـران، ما عـدا نقطة الرأس.

### أتحقَّق من فهمي

**أكتب قاعدة اقتـران القيمة المطلقـة المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.**



## أتدرّب وأحُلُّ المسائل

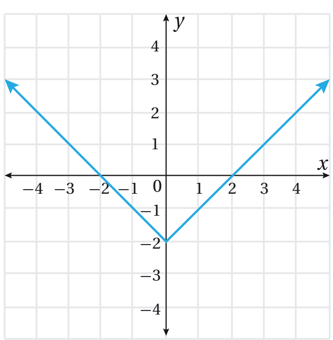
أُعيد تعريف كلٍّ من الاقترانات الآتية:

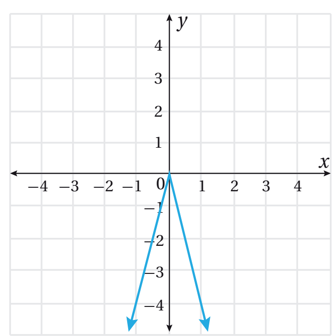
1. $f(x) = |x-6|$
2. $g(x) = |3x+3|$
3. $h(x) = |2x-5| + 3$
4. $p(x) = 3|x+1|$

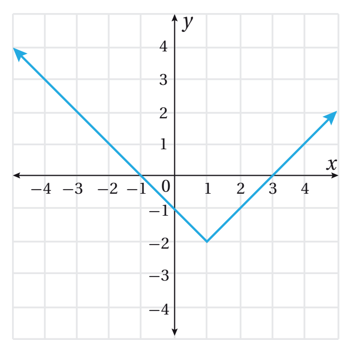
أُمثِّل بيانيًّا كل اقتران ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

5. $f(x) = |x| + 3$
6. $f(x) = -|x| + 3$
7. $f(x) = |x+5|$
8. $f(x) = |x-5|$
9. $f(x) = |2x-4| - 3$
10. $f(x) = -|2x-4| - 3$

أكتب قاعدة اقتران القيمة المطلقة المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

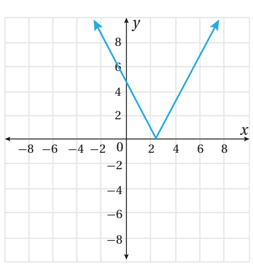
11. 

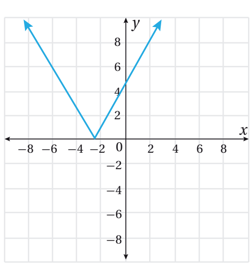
12. 

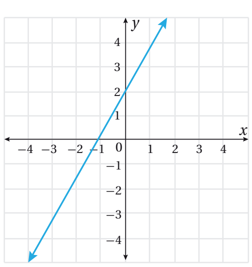
13. 

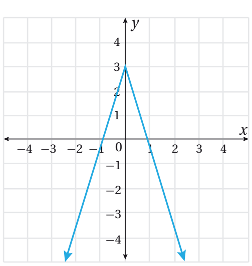
## مهارات التفكير العليا

14. **تبرير:** أيُّ الآتية تُمثِّل الاقتران: $f(x) = |2x-5|$، مُبرِّرًا إجابتي؟

a) 

b) 

c) 

d) 

15. **مسألة مفتوحة:** أكتب اقتران قيمة مطلقة، مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه $[3, \infty)$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}3x-1 & ,x\geq 2\\ 2x+1 & ,x<2\end{cases}$، فإنَّ قيمة $f(-1)$ هي:

a) $-4$
b) $-1$
c) $3$
d) $-3$

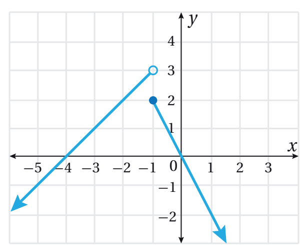
2 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}-4 & ,-3\leq x<1\\ x-3 & ,x\geq 1\end{cases}$، فـإنَّ قيمـة $f(1)$ هي:

a) $-4$
b) $0$
c) $-2$
d) $4$

3 إذا كان: $f(x)=-|2x+1|+2$، فإنَّ قيمة $f(-1)$ هي:

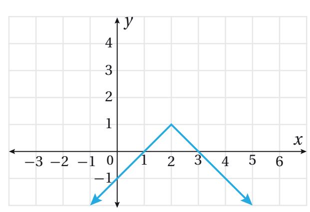
a) $0$
b) $1$
c) $-1$
d) $3$

4 الاقتـران الـذي تمثيله البياني كما في الشـكل المجاور هو:



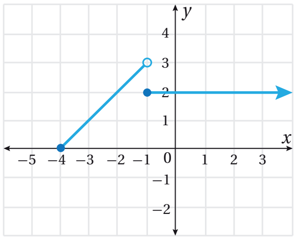
a) $f(x)=\begin{cases}x-4 & ,x<-1\\ 2x & ,x\geq -1\end{cases}$
b) $f(x)=\begin{cases}x+4 & ,x<1\\ -2x & ,x\geq 1\end{cases}$
c) $f(x)=\begin{cases}x-4 & ,x<1\\ 2x & ,x\geq 1\end{cases}$
d) $f(x)=\begin{cases}x+4 & ,x<-1\\ -2x & ,x\geq -1\end{cases}$

5 الاقتـران الـذي تمثيله البياني كما في الشـكل المجاور هو:



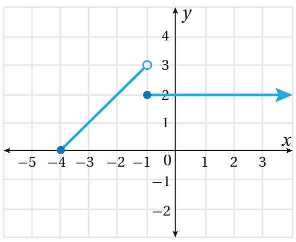
a) $f(x)=|x+2|+1$
b) $f(x)=-|x+2|+1$
c) $f(x)=|x-2|+1$
d) $f(x)=-|x-2|+1$

6 مجال الاقتـران الذي يظهر تمثيله البياني في الشكل المجاور هو:



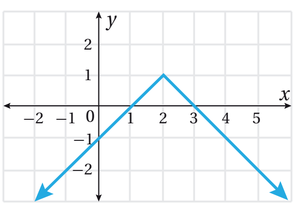
a) $[-4,\infty)$
b) $[4,\infty)$
c) $(-\infty,-4]$
d) $(-\infty,4]$

7 مـدى الاقتـران الذي يظهر تمثيله البياني في الشكل المجاور هو:



a) $[-4,\infty)$
b) $[-4,3)$
c) $(-4,3]$
d) $[0,3)$

8 مـدى الاقتـران الذي يظهر تمثيله البياني في الشكل المجاور هو:



a) $(-\infty,1]$
b) $(-\infty,1)$
c) $(-\infty,2]$
d) $(-\infty,2)$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

9 $f(x)=\begin{cases}3x-9 & ,-2\leq x<0\\ x & ,x\geq 0\end{cases}$

10 $f(x)=\begin{cases}1-2x & ,x<-3\\ 7 & ,x\geq -3\end{cases}$

11 $f(x)=|x-4|-4$

12 $f(x)=|2x+6|+3$

**مواقف سيّارات:** يُبيِّن الجدول الآتي أجرة إيقاف السيّارة في أحد المواقف المُخصَّصة لذلك:

| مدَّة الوقوف | الأجرة |
|---|---|
| لا تزيد على ساعة واحدة | JD 1.5 |
| تزيد على ساعة واحدة، ولا تزيد على 3 ساعات | JD 3 |
| تزيد على 3 ساعات | JD 7 |

**13** أكتب اقترانًا متشعبًا يُمثِّل أجرة إيقاف السيّارة في الموقف $t$ من الساعات.

**14** أُمثِّل الاقتران المتشعب إذا كان أقصى عدد لساعات إيقاف السيّارات في الموقف 10 h يوميًّا.

**15** ما الأجرة التي يدفعها شخص أوقف سيّارته في ساحة الموقف مدَّة 3.5 h؟

**16** ما الأجرة التي يدفعها شخص أوقف سيّارته في ساحة الموقف مدَّة 2.25 h؟

## تدريب على الاختبارات الدولية

**17** **ضريبة دخل:** تُحصِّل إحدى الدول ضريبة نسبتها 15% من دخل الأفراد لأول 20000$ من أموالهم سنويًّا، وضريبة نسبتها 20% من الدخل السنوي الذي يزيد على 20000$. أكتب اقترانًا متشعبًا يُحدِّد قيمة ضريبة الدخل لفرد في هذه الدولة، دخله السنوي $x$ دولارًا أمريكيًّا.

**أُعيد تعريف كلٍّ من الاقترانات الآتية في صورة اقتران متشعب:**

**18** $f(x) = -|1 - 3x|$

**19** $g(x) = \left|\frac{1}{2}x - 4\right|$

**أختار التمثيل البياني المناسب لكل اقتران متشعب ممّا يأتي:**

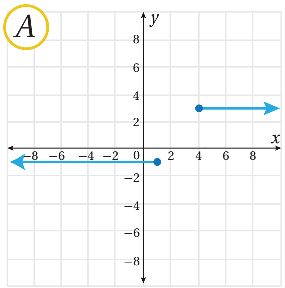
**20** $f(x) = \begin{cases} -3 & , x \leq -3 \\ x & , -3 < x < 2 \\ 2 & , x \geq 2 \end{cases}$

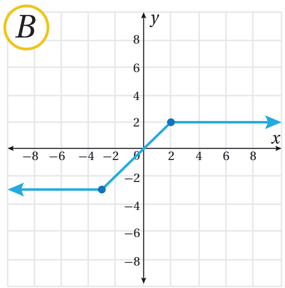
**21** $f(x) = \begin{cases} -x-5 & , x < 0 \\ x-5 & , x \geq 0 \end{cases}$

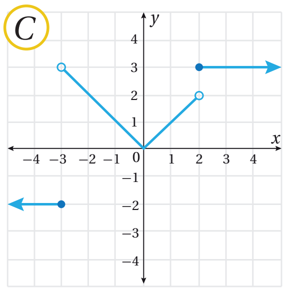
**22** $f(x) = \begin{cases} -1 & , x \leq 1 \\ 3 & , x \geq 4 \end{cases}$

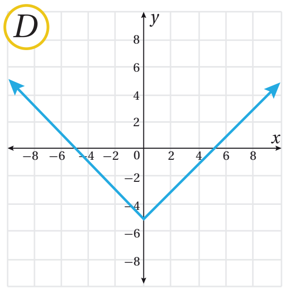
**23** $f(x) = \begin{cases} -4 & , x < -2 \\ 3-2x & , -2 \leq x < 3 \\ x-4 & , x \geq 3 \end{cases}$

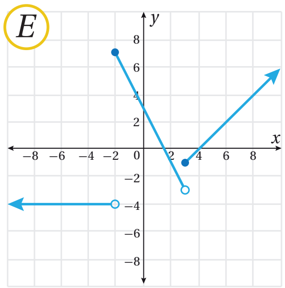
**24** $f(x) = \begin{cases} -2 & , x \leq -3 \\ |x| & , -3 < x < 2 \\ 3 & , x \geq 2 \end{cases}$

A


B


C


D


E


الوحدة

5

# النهايات والمشتقات

# Limits and Derivatives

## ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ حساب النهايات وبحث الاتصال وإيجاد المشتقات أدوات أساسية لدراسة سلوك الاقترانات وتحليلها؛ ما يساعد على فهم المواقف العلمية والحياتية التي يُمكِن نمذجتها باستعمال الاقترانات، مثل: السرعة، والتسارع. سأتعلَّم في هذه الوحدة بعض مفاهيم النهايات والاتصال والاشتقاق، وأستعملها في سياقات حياتية.

## تعلَّمْتُ سابقًا:

- تمثيل الاقترانات الخطية والتربيعية والمتشعبة بيانيًّا، وتحديد المجال والمدى لها.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- إيجاد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.
- إيجاد المشتقة الأولى لكثيرات الحدود.

## سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًّا وبيانيًّا وجبريًّا، وبحث اتصال اقتران عند نقطة ما.
- إيجاد مشــتقة اقترانات القوَّة باستعمال كلٍّ من التعريف، والقواعد.
- تحديــد كلٍّ من النقــاط الحرجــة وتصنيفها، وفترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراســة الوحدة) في الصفحتين (10) و (11) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

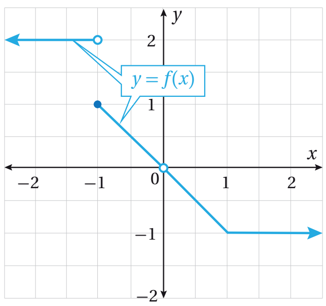
# النهايات والاتصال
# Limits and Continuity

**فكرة الدرس** إيجاد نهاية اقتران عند قيمة مُحدَّدة عدديًا وبيانيًّا وجبريًّا، وبحث اتصال اقتران عند نقطة ما.

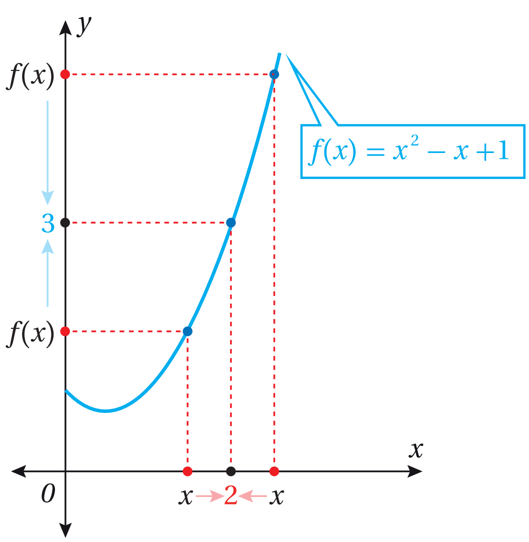
**المصطلحات** النهاية، الصيغة غير المُحدَّدة، الاقتران المتصل.

**مسألة اليوم** اعتمـادًا علـى التمثيـل البيانـي لمنحنـى الاقتران $f$ في الشكل المجاور، أجد كُلًّا ممّا يأتي:

$f(-1),\ f(0),\ f(-0.99),\ f(1.0009)$.




إذا كان الاقتـران: $f(x) = x^2 - x + 1$، واختـرْتُ قِيَمًا للمُتغيِّر $x$ تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، فإنَّنـي أُلاحِظ من جدول القِيَم والتمثيل البياني التالي أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 2 من جهة اليسـار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ من العدد 3، وأنَّه كلَّمـا اقتربت قِيَم $x$ من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران من العدد 3، وبذلك فإنَّ **نهاية** (limit) الاقتران $f$ عند اقتراب $x$ من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار هي 3، وتُكتَب كما يأتي: $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3$




2

| $x$ | 1.9 | 1.95 | 1.99 | 1.995 | 1.999 | | 2.001 | 2.005 | 2.01 | 2.05 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.710000 | 2.852500 | 2.970100 | 2.985025 | 2.997001 | | 3.003001 | 3.015025 | 3.030100 | 3.152500 | 3.310000 |

3

جهة اليسار

جهة اليمين

## مفهوم أساسي
### النهاية عند نقطة

**بالكلمات:** إذا اقتربت قيمة الاقتران $f(x)$ من قيمة واحدة $L$ عند اقتراب $x$ من $c$، فإنَّ نهاية الاقتران $f(x)$ هي $L$ عند اقتراب $x$ من $c$؛ شرط أنْ يكون الاقتران مُعرَّفًا في فترة مفتوحة حول $c$.

**بالرموز:**

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

**وتُقرَأ:** نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب $x$ من $c$ هي $L$.

### لغة الرياضيات

تُقرَأ $\lim_{x \to c} f(x) = L$ أيضًا كما يأتي: الاقتران $f(x)$ يقترب من $L$ عند اقتراب $x$ من $c$.

يشير الرمز $\lim_{x \to c} f(x) = L$ إلى اقتراب $x$ من $c$ من جهتي اليمين واليسار.

لتحديد جهة اقتراب قِيَم $x$ من القيمة $c$:

- أستعمل الرمز $\lim_{x \to c^-} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليسار، حيث: $x < c$، وتُقرَأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب $x$ من $c$ من جهة اليسار.
- أستعمل الرمز $\lim_{x \to c^+} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليمين، حيث: $x > c$، وتُقرَأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عند اقتراب $x$ من $c$ من جهة اليمين.

إذا كانت النهايتان من جهتي اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، فإنَّ نهاية الاقتران تكون موجودة.

## مفهوم أساسي
### النهاية من الجهتين

**بالكلمات:** تكون نهاية الاقتران $f(x)$ موجودة عند اقتراب $x$ من $c$ إذا وفقط إذا كانت النهايتان من جهتي اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

**بالرموز:**

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c} f(x) = L$$

### رموز الرياضيات

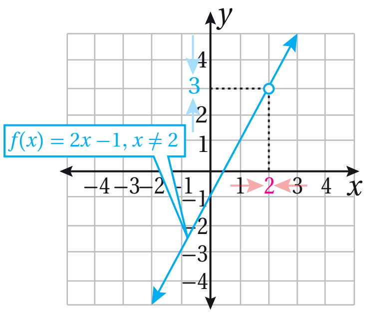
يُقرَأ الرمز ($\Leftrightarrow$): إذا وفقط إذا، ويعني تحقُّق صحة عبارة الرياضيات في كلا الاتجاهين.

### مثال 1

**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:**

1 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$، حيث: $f(x) = 2x - 1, x \neq 2$.

**الطريقة 1:** إيجاد قيمة نهاية الاقتران بيانيًّا.




أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3 ، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 2 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3 ، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$$

بما أنَّ النهايتين من جهتي اليمين واليسار متساويتان، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة، وقيمتها 3.

**الطريقة 2:** إيجاد قيمة نهاية الاقتران عدديًّا.

لإيجاد نهاية الاقتران $f$ عدديًّا، أُنشِئ جدول قِيَم باختيار قِيَم $x$ القريبة من العدد 2 من كلتا الجهتين، ثم إيجاد قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها:

2

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.8 | 2.98 | 2.998 | | 3.002 | 3.02 | 3.2 |

3

جهة اليسار      جهة اليمين

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 2 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$$

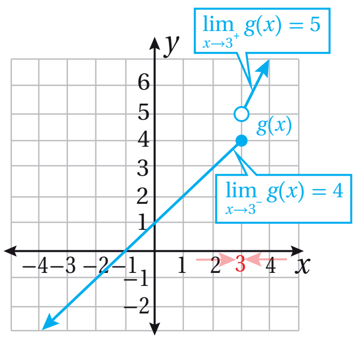
أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 2 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $f(x)$ المقابلة لها من العدد 3، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$$

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 3$، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ موجودة، وقيمتها 3

**2** $\lim\limits_{x\to3} g(x)$، حيث: $g(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \le 3 \\ 2x-1 & ,x > 3 \end{cases}$.

**الطريقة 1:** إيجاد قيمة نهاية الاقتران بيانيًّا.




أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 3 على المحور $x$ من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 5، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^+} g(x) = 5$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 3 على المحور $x$ من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 4، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^-} g(x) = 4$$

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to3^+} g(x)$، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim\limits_{x\to3} g(x)$ غير موجودة.

**الطريقة 2:** إيجاد قيمة نهاية الاقتران عدديًّا.

لإيجاد نهاية الاقتران $g$ عدديًّا، أُنشِئ جدول قِيَم باختيار قِيَم $x$ القريبة من العدد 3 من كلتا الجهتين، ثم إيجاد قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها:

3

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | | 5.002 | 5.02 | 5.2 |

جهة اليسار     جهة اليمين

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 3 من جهة اليمين اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 5، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^+} g(x) = 5$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّه كلَّما اقتربت قِيَم $x$ من العدد 3 من جهة اليسار اقتربت قِيَم الاقتران $g(x)$ المقابلة لها من العدد 4، وهذا يعني أنَّ:

$$\lim_{x\to3^-} g(x) = 4$$

**أتعلَّم**

عند إيجاد قيمة نهاية الاقتران بالطريقة العددية، فإنَّ الناتج لا يختلف عنه بالطريقة البيانية.

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to3^+} g(x)$، فإنَّ نهاية الاقتران $\lim\limits_{x\to3} g(x)$ غير موجودة.

### أتحقَّق من فهمي

**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:**

**a)** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$، حيث: $f(x) = x^2$.

**b)** $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$، حيث: $h(x) = \begin{cases} x+2, & -5\le x<-3 \\ 1, & x>-3 \end{cases}$.

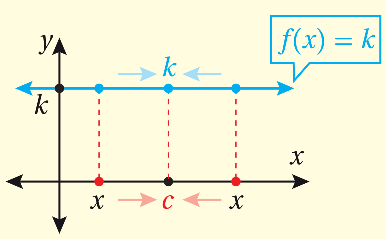
تعلَّمْتُ في المثال السـابق كيف أجد قيمة نهاية الاقتران بيانيًّا وعدديًّا، وسـأتعلَّم الآن كيفية إيجادها لبعض الاقترانات البسـيطة (مثل: الاقتران الثابت، والاقتران المحايد) بسـهولة من دون حاجة إلى استعمال الطريقة البيانية والطريقة العددية.

## مفهوم أساسي — نهايات الاقترانات

### نهاية الاقتران الثابت

**بالكلمات:** نهايـة الاقتران الثابـت عند أيِّ نقطة $c$ هي القيمة الثابتة للاقتران.

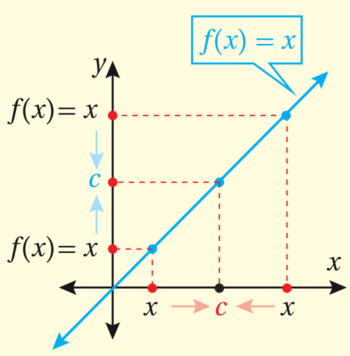
**بالرموز:** $\lim\limits_{x\to c} k = k$




### نهاية الاقتران المحايد

**بالكلمات:** نهايـة الاقتـران $f(x) = x$ عند النقطة $c$ هي $c$.

**بالرموز:** $\lim\limits_{x\to c} x = c$




يُمكِن أيضًا اسـتعمال الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قِيَم بعض النهايات من دون حاجة إلى استعمال الطريقة البيانية والطريقة العددية.

## مفهوم أساسي

### خصائص النهايات

إذا كان $k, c$ عددين حقيقيين، وكان $n$ عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x \to c} f(x), \lim\limits_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإنَّ كُلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $$1)\ \lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

خاصية الفرق: $$2)\ \lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

خاصية الضرب في ثابت: $$3)\ \lim_{x \to c} k\,(f(x)) = k \lim_{x \to c} f(x)$$

خاصية الضرب: $$4)\ \lim_{x \to c} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \times \lim_{x \to c} g(x)$$

خاصية القسمة: $$5)\ \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)},\ \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$$

خاصية القوَّة: $$6)\ \lim_{x \to c} (f(x))^n = (\lim_{x \to c} f(x))^n$$

خاصية الجذر النوني: $$7)\ \lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

إذا كان $n$ عددًا زوجيًّا، فأتحقَّق من أنَّ $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$

### تنبيه

لا يُمكِن استعمال خاصية القسمة إذا نتج من تطبيقها مقام يساوي صفرًا.

### أتعلَّم

وُضِع هذا الشرط لعدم وجود النهاية للجذر الزوجي من جهة يسار الصفر؛ ذلك أنَّ الجذر الزوجي غير مُعرَّف للأعداد السالبة.

### مثال 2

**أستعمل خصائص النهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:**

**1** $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 5x - 3).$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 5x - 3)$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2) + \lim_{x \to 1} (5x) - \lim_{x \to 1} (3)$$ خاصيتا المجموع والفرق

$$= (\lim_{x \to 1} x)^2 + 5 \times \lim_{x \to 1} (x) - \lim_{x \to 1} (3)$$ خاصيتا القوَّة والضرب في ثابت

$$= (1)^2 + 5 \times 1 - 3$$ نهاية الاقتران المحايد، ونهاية الاقتران الثابت

$$= 3$$ بالتبسيط

**أتذكَّر**

فــي الفــرع الثاني من المثــال، يجب التحقُّق من أنَّ $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$؛ لأنَّ دليــل الجذر عدد زوجي.

**2** $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{5}{x^2+9}}$

أُلاحِــظ أنَّ $f(x) = \dfrac{5}{x^2+9} > 0$، بصرف النظر عن العــدد الحقيقي الذي تقترب منه القيمة $x$. وبذلك، فإنَّ:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{5}{x^2+9}} = \sqrt{\lim_{x\to 4}\frac{5}{x^2+9}}$$ خاصية الجذر النوني

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 4} 5}{\lim\limits_{x\to 4}(x^2+9)}}$$ خاصية القسمة

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 4} 5}{\lim\limits_{x\to 4}(x^2) + \lim\limits_{x\to 4}(9)}}$$ خاصية المجموع

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 4} 5}{(\lim\limits_{x\to 4} x)^2 + \lim\limits_{x\to 4}(9)}}$$ خاصية القوَّة

$$= \sqrt{\frac{5}{(4)^2+9}}$$ نهاية الاقتران المحايد، ونهاية الاقتران الثابت

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}$$ بالتبسيط

**أتحقَّق من فهمي**

**أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:**

**a)** $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2 - 4x - 2)$

**b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5}$

يتبيَّن من المثال الســابق أنَّ نهايــة كل اقتران هي $f(c)$ عند اقتراب $x$ مــن $c$؛ لذا يُمكِن إيجاد هذه النهايات بالتعويض المباشــر في الاقتران للقيمة التي تقترب منها قِيَم $x$. وهذا الاستنتاج صحيح لاقترانات كثيرات الحدود جميعها، وللاقترانات النسبية بشروط مُحدَّدة.

**مفهوم أساسي** **النهايات بالتعويض المباشر**

**نهايات كثيرات الحدود**

إذا كان الاقتران $f(x)$ كثير حدود، وكان $c$ عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

**نهايات الاقترانات النسبية**

إذا كان: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ اقترانًا نسبيًّا، وكان $c$ عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = \frac{p(c)}{q(c)}, \; q(c) \neq 0$$

**تنبيه**

يُمكِن إيجاد نهاية الاقتران النسبي بالتعويض المباشر ما دامت قيمة مقام الاقتران النسبي عند $c$ لا تساوي صفرًا.

**مثال 3**

**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إنْ كان ذلك مُمكِنًا، وإلّا فأذكر السبب:**

**1** $\lim\limits_{x \to -1} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$

أُلاحِظُ أنَّ الاقتران: $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ كثير حدود، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد قيمة نهايته بالتعويض المباشر بـ $(x = -1)$:

$$\lim_{x \to -1} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$$

$$= 4(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 1$$ بالتعويض المباشر

$$= -8$$ بالتبسيط

**2** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}$

بما أنَّ $x = 2$ تقع في مجال الاقتران النسبي (لأنَّها ليست صفرًا للمقام)، فإنَّه يُمكِن إيجاد قيمة نهاية الاقتران بالتعويض المباشر:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 1}{(2)^2 - (2) + 1}$$ بالتعويض المباشر

$$= \frac{9}{3} = 3$$ بالتبسيط

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

بما أنَّ $x = 3$ لا تقع في مجال الاقتران النسبي (لأنَّها صفر للمقام)، فإنَّه يتعذَّر إيجاد قيمة نهاية الاقتران بالتعويض المباشر.

### أتحقَّق من فهمي

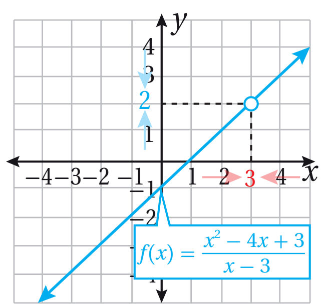
**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إنْ كان ذلك مُمكِنًا، وإلّا فأذكر السبب:**

a) $\lim\limits_{x\to -2} (5x^2-6x-15)$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

لاحظْتُ في الفرع الثالث من المثال السابق أنَّه بالتعويض المباشر للقيمة التي تقترب منها قِيَم $x$ في نهاية الاقتران، فإنَّ الناتج هو $\frac{0}{0}$، في ما يُعرَف **بالصيغة غير المُحدَّدة** (indeterminate form)، لكنَّ ذلك لا يعني أنَّ النهاية غير موجودة؛ فالتمثيل البياني للاقتران الظاهر جانبًا يُبيِّن أنَّ النهاية موجودة عندما تقترب $x$ من العدد 3، وقيمتها 2؛ لذا يجب إيجاد صيغة مكافئة للاقتران عن طريق تحليل البسط، أو تحليل المقام، أو تحليل كليهما، ثم اختصار العوامل المشتركة بينهما للتخلُّص من صفر المقام قبل التعويض.




$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

## مثال 4

**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:**

1 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي هو $\frac{0}{0}$؛ لذا أُحلِّل المقدار جبريًّا، ثم أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x\to 3} (x-1)$$ بالتبسيط

$$= 3-1 = 2$$ بالتعويض المباشر، والتبسيط

**2** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي هو $\frac{0}{0}$ ؛ لذا أُحلِّل المقدار جبريًّا، ثم أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x\,(x-2)}$$ بتحليل البسط والمقام

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\,\cancel{(x-2)}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x}$$ بالتبسيط

$$= \frac{2+2}{2} = 2$$ بالتعويض المباشر، والتبسيط

**أتذكَّر**

يُمكِن اختصار $(x - a)$ في البسط مع $(a - x)$ في المقام، حيث $a$ عدد حقيقي، ويبقى في البسط 1-.

**أتحقَّق من فهمي**

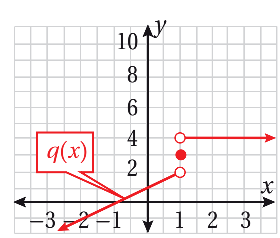
**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

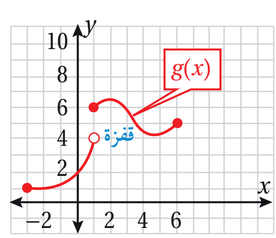
b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{16 - x^2}{2x - 8}$

يكــون **الاقتران متصلًا** (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أيُّ انقطاع، أو فجوة، أو قفزة. وكذلك يكون الاقتران متصلًا عند نقطة ما تقع على منحناه إذا مَرَّ هذا المنحنى بتلك النقطة من دون انقطاع.

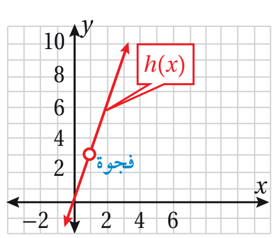
تشير التمثيلات البيانية الآتية إلى حالات من اتصال بعض الاقترانات أو عدم اتصالها عندما $x = 1$:



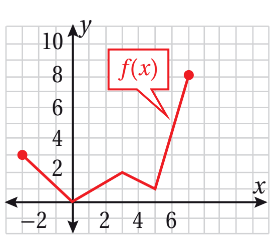
غير متصل عندما $x = 1$



غير متصل عندما $x = 1$



غير متصل عندما $x = 1$



متصل عندما $x = 1$

أُلاحِظ أنَّ منحنى الاقتران $h$ غير متصل عندما $x = 1$ ؛ لأنَّه غير مُعرَّف عندها (بالرغم مــن أنَّ نهاية الاقتران $h$ موجودة عند اقتــراب $x$ من العدد 1). أمّا الاقترانان $g$ و $q$ فغير متصلين عندما $x = 1$؛ نظرًا إلى وجود قفزة في منحنى كلٍّ منهما؛ ما يعني أنَّ

النهايـــة غير موجودة عند اقتراب $x$ من العدد 1 (بالرغم من أنَّ كُلًّا منهما مُعرَّف عندما $x=1$)، في حين يظهر الاقتران $f$ متصلًا عندما $x=1$، ويكون مُعرَّفًا عندما $x=1$ ، حيث: $f(1)=1$، وكذلك توجد له نهاية عند اقتراب $x$ من العدد 1، حيث:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

إذن، يكون الاقتران متصلًا عند نقطة ما إذا كانت قيمة نهايته تساوي صورة الاقتران عند هذه النقطة.

**أتذكَّر**

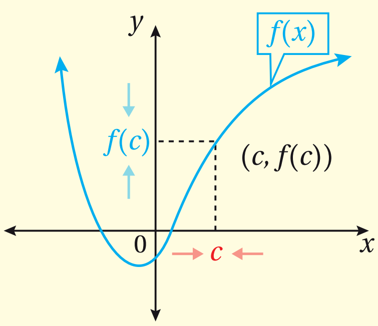
وجـــود النهايـــة يعني أنَّ النهايتين في جهتي اليمين واليسار متساويتان، علمًا بـــأنَّ وجـــود النهاية عند نقطة ما لا يعني بالضرورة أنَّ الاقتـــران مُعرَّف عند تلك النقطة.

## مفهوم أساسي

**الاتصال عند نقطة**

يكون الاقتران $f(x)$ متصلًا عندما $x=c$ إذا حقَّق الشروط الآتية جميعها:

- $f(c)$ مُعرَّفة.
- $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.




## مثال 5

**أُحدِّد إذا كان كل اقتران ممّا يأتي متصلًا عند قيمة $x$ المعطاة، مُبرِّرًا إجابتي:**

**1** $f(x)=x^2-x+1,\ x=4$

**الخطوة 1:** أجد قيمة الاقتران عندما $x=4$.

$$f(4)=4^2-4+1 \quad \text{بالتعويض في الاقتران}$$
$$=13 \quad \text{بالتبسيط}$$

**الخطوة 2:** أجد قيمة نهاية الاقتران عندما تقترب $x$ من العدد 4

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-x+1)=13 \quad \text{بالتعويض المباشر في الاقتران}$$

**الخطوة 3:** أُقارِن $f(4)$ بـ $\lim_{x\to 4} f(x)$.

$$\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)=13 \quad \text{القيمتان متساويتان}$$

إذن، الاقتران $f$ متصل عندما $x=4$.

**2** $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}\ ,\ x=1$

الاقتران النسبي $g$ غير مُعرَّف عندما $x=1$؛ لأنَّ ذلك يجعل مقامه صفرًا.

إذن، الاقتران النسبي $g$ غير متصل عندما $x=1$.

**3** $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ,x<1 \\ x^3+2 & ,x\ge 1\end{cases}\ ,\ x=1$

لتحديد إذا كان الاقتران $f$ متصلًا عندما $x=1$، أتحقَّق من أنَّ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

**الخطوة 1:** أجد قيمة الاقتران عندما $x=1$.

$f(1)=1^3+2=3$ بالتعويض المباشر في الاقتران

**الخطوة 2:** أجد قيمة نهاية الاقتران عندما تقترب $x$ من العدد 1

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3+2)=3$ النهاية من جهة اليمين

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3$ النهاية من جهة اليسار

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$، فإنَّ نهاية الاقتران $f$ موجودة عندما تقترب $x$ من العدد 1، وقيمتها 3.

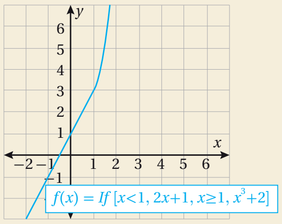
**الخطوة 3:** أُقارِن $f(1)$ بـ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$ القيمتان متساويتان

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3=f(1)$، فإنَّ الاقتران $f$ متصل عندما $x=1$.

### أتعلّم

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f$، والتحقُّق بيانيًّا من اتصاله عندما $x=1$، كما يظهر في التمثيل البياني الآتي:




### أتحقَّق من فهمي

**أُحدِّد إذا كان كل اقتران ممّا يأتي متصلًا عند قيمة $x$ المعطاة، مُبرِّرًا إجابتي:**

a) $g(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}, x=-1$

b) $h(x)=\begin{cases} x-1 & ,x<3 \\ 5-x & ,x\ge 3\end{cases}, x=3$

### أُفكِّر

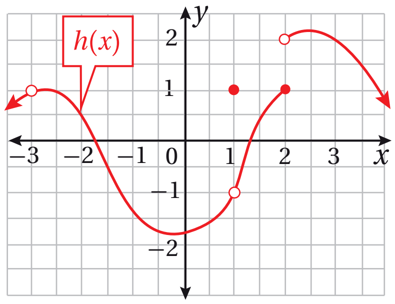
لماذا يُعَدُّ الاقتران:

$g(x)=\begin{cases} x-1 & ,x<3 \\ 5-x & ,x>3\end{cases}$

غير متصل عندما $x=3$؟

## أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أستعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):




1) $\lim_{x\to 2^+} h(x)$

2) $\lim_{x\to 2^-} h(x)$

3) $\lim_{x\to 2} h(x)$

4) $\lim_{x\to 1} h(x)$

5) $\lim_{x\to -2} h(x)$

6) $\lim_{x\to -3} h(x)$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت) بيانيًّا وعدديًّا:

7) $\lim_{x\to 2} (x+3)$

8) $\lim_{x\to 1} (x^2-1)$

9) $\lim_{x\to 3} f(x), f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq 3 \\ x+3 & , x < 3 \end{cases}$

10) $\lim_{x\to -1} g(x), g(x) = \begin{cases} -x+1 & , x \leq -1 \\ x-1 & , x > -1 \end{cases}$

أستعمل الخصائص الجبرية للنهايات لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي:

11) $\lim_{x\to -1} (x^2+2x+1)$

12) $\lim_{x\to 4} \left(\sqrt{x}+\frac{4}{x}\right)$

13) $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\frac{2x+2}{x^2+18}}$

أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

14) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

15) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x-1}$

16) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

أبحث اتصال كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة $x$ المعطاة إزاء كلٍّ منها:

17) $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 2 \\ x^2 & , x \geq 2 \end{cases}, \; x = 2$

18) $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & , x < -1 \\ x^3 & , x \geq -1 \end{cases}, \; x = -1$

19) $f(x) = x^2+2x+3, \; x = 0$

20) $h(x) = \frac{x^3+8}{2}, \; x = 2$

21) $g(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}, \; x = -2$

22) $q(x) = \frac{3x^2+x}{x}, \; x = 0$

**عمل**: تعمل سـميرة في محل لبيع الحُلِيِّ والجواهر لقاء راتب شـهري وعمولة إضافية تعتمد على قيمة مبيعاتها الشـهرية. يُمكِن تمثيل المبلغ الذي تحصل عليه سميرة شهريًّا بالاقتران الآتي، حيث $x$ قيمة مبيعاتها الشهرية بالدينار:

$$P(x)=\begin{cases}500+0.1x & , \quad 0\le x\le 8000\\ 660+0.08x & , \quad x>8000\end{cases}$$

23 أجد راتب سميرة في شهر حزيران إذا كانت مبيعاتها فيه JD 8000.

24 أُبيِّن أنَّ الاقتران $p$ متصل عندما $x=8000$.

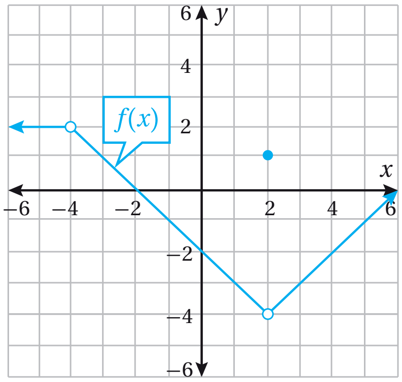
25 ابحث اتصال الاقتران: $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & , \ x<-1\\ x^3+1 & , \ x>-1\end{cases}$ عندما $x=-1$.

## مهارات التفكير العليا

26 **مسـألة مفتوحة**: أكتب اقترانًا نسـبيًّا $f(x)$، بحيث يكون $f(-1)$ غير مُعرَّف، وتكون $\lim_{x\to -1} f(x)=-2$، مُبرِّرًا إجابتي بيانيًّا.

27 **تبرير**: إذا كان: $f(x)=\begin{cases}x+3 & , \quad x<3\\ 2+\sqrt{k} & , \quad x>3\end{cases}$، وكانت $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة، فأجد قيمة الثابت $k$، مُبرِّرًا إجابتي.

28 **تبرير**: أُبيِّن الفرق بين عدم اتصال الاقتران $f$ المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور عندما $x=2$، وعدم اتصاله عندما $x=-4$، مُبرِّرًا إجابتي.




29 **تحدٍّ**: إذا كان الاقتران: $h(x)=\begin{cases}x+3 & , \quad x\neq 3\\ x^2+k & , \quad x=3\end{cases}$ متصلًا عندما $x=3$ ، فأجد قيمة الثابت $k$.

الدرس 2

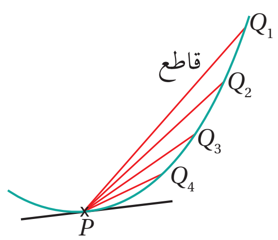
# المشتقة
# The Derivative

**فكرة الدرس** إيجاد مشتقة اقترانات القوّة باستعمال كلٍّ من التعريف، والقواعد.

**المصطلحات** التعريف العام للمشتقة، اقتران القوّة.

**مسألة اليوم** يُمكِن نمذجة موقع أسد يطارد فريسته على أرض مستوية، ويتحرَّك في مسار مستقيم، باستعمال الاقتران: $s(t) = 7t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{7}{2}}, t \geq 0$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و$s$ الموقع بالأمتار. أجد سرعة الأسد بعد 4 ثوانٍ من بدء حركته.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة ما عن طريق المشتقة، وذلك بإيجاد ميل المماس عند هذه النقطة.



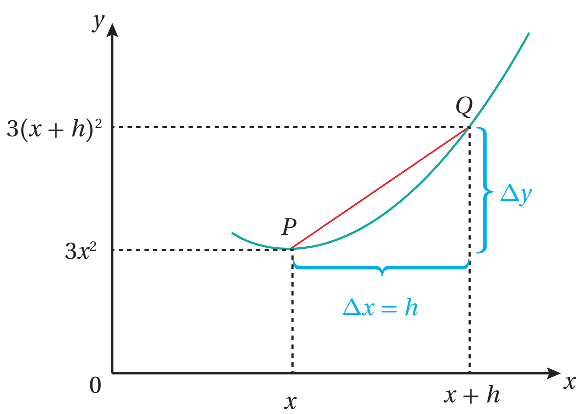

يُمثِّل الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى اقتران عند النقطة $P$.
أُلاحِظ أنَّ النقطة $Q_1$ في أثناء حركتها على منحنى الاقتران نحو النقطة $P$ تمرُّ بالنقاط: $Q_2$ و$Q_3$ و $Q_4$، وأنَّ ميل كلٍّ من القواطع: $\overline{PQ_2}$ و $\overline{PQ_3}$ و $\overline{PQ_4}$ يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة $P$.

اعتمادًا على ذلك، يُمكِن إيجاد مشتقة اقتران قاعدته معلومة، مثل: $y = 3x^2$.

فمثلًا، إذا كانت النقطة $Q$ تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها $h$ عن النقطة $P(x, 3x^2)$، فإنَّ إحداثيي النقطة $Q$ هما: $(x+h, 3(x+h)^2)$.

إذن: ميل القاطع $\overline{PQ}$ يساوي:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h) - x} \\
&= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h} \\
&= \frac{6hx + 3h^2}{h} \\
&= 6x + 3h
\end{aligned}
$$




**أُفكِّر**
لماذا يجب ألّا تكون قيمة $h = 0$؟

وعند اقتراب النقطة $Q$ من النقطة $P$، فإنَّ المســـافة الأفقية $h$ تصبح أصغر فأصغر؛ ما يعني أنَّ هذه المسافة تقترب من الصفر، وهي تُكتَب كما يأتي: $h \to 0$.

وبذلك، فإنَّ ميل المماس عند النقطة $P$ يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$:

$$m = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

وتُسمّى $6x$ مشتقة الاقتران $y = 3x^2$، ويُرمَز إليها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن، إذا كان $y = 3x^2$، فإنَّ $\frac{dy}{dx} = 6x$.

يُطلَــق على هذه الطريقة في إيجاد مشــتقة اقتران عند نقطة ما اســم **التعريف العام للمشــتقة** (definition of the derivative).

**رموز الرياضيات**

يُرمَز إلى مشتقة الاقتران $y = f(x)$ بالرموز: $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$.

**مفهوم أساسي** **التعريف العام للمشتقة**

مشتقة الاقتران $f$ بالنسبة إلى المُتغيِّر $x$ هي الاقتران $f'$ الذي قيمته عند $x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

**مثال 1**

**أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = 5x - 2$ باستعمال التعريف العام للمشتقة عندما $x = 3$.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقة

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$ بتعويض $x = 3$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(3+h) - 2 - (5(3) - 2)}{h}$$ بتعويض $f(3+h) = 5(3+h) - 2$, $f(3) = 5(3) - 2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{15 + 5h - 2 - 15 + 2}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$ بجمع الحدود المتشابهة

بالقسمة على $h$
$$= \lim_{h \to 0} 5$$

بتعويض $h = 0$
$$= 5$$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = 7x + 5$ باستعمال التعريف العام للمشتقة عندما $x = 2$.

**يُمكِن استعمال التعريف العام للمشتقة لإيجاد اقتران جديد يُمثِّل مشتقة الاقتران الأصلي.**

**معلومة**

يعود تاريخ إيجاد المشتقة باستعمال النهايات إلى القرن السابع عشر الميلادي، ويرتبط ذلك بعالِمي الرياضيات المشهورين: إسحق نيوتن، وغوتفريد لايبنتس.

### مثال 2

**أجد مشتقة الاقتران: $y = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقة.**

التعريف العام للمشتقة
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بتعويض $f(x+h) = (x+h)^2, f(x) = x^2$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

بفكِّ الأقواس للتبسيط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

بجمع الحدود المتشابهة
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

بإخراج $h$ عاملًا مشتركًا من حدود البسط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

بالقسمة على $h$
$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

بتعويض $h = 0$
$$= 2x$$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = 8 - x^2$ باستعمال تعريف المشتقة.

### مشتقة اقترانات القوَّة

يُطلَق على الاقتران: $f(x)=x^n$ الذي فيه $n$ عدد حقيقي اسم **اقتران القوَّة** (power function)، ومن أمثلته:

$$h(x)=\sqrt{x^3} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{x^3} \quad , \quad f(x)=x^7$$

إنَّ إيجاد المشتقة باستعمال تعريفها العام يستغرق وقتًا كبيرًا في كثير من الأحيان، ولكنْ توجد قواعد تُسهِّل عملية إيجادها، وتُوفِّر الوقت والجهد، مثل قاعدة مشتقة اقتران القوَّة.

**مفهوم أساسي** — **مشتقة اقترانات القوَّة**

**بالكلمات:** عند اشتقاق الاقتران: $y=x^n$، فإنَّ أُسَّ $x$ في المشتقة يكون أقل بواحد من أُسِّ $x$ في الاقتران الأصلي، ومعامل $x$ في المشتقة يساوي أُسَّ $x$ في الاقتران الأصلي.

**بالرموز:** إذا كان $y=x^n$، حيث $n$ عدد حقيقي، فإنَّ $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$.

### مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x)=x^5$

$f'(x)=5x^{5-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$=5x^4$ بالتبسيط

**2** $y=\frac{1}{x}$

$y=x^{-1}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\frac{dy}{dx}=(-1)x^{-1-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$ تعريف الأُسِّ السالب

**3** $y=x^{\frac{5}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ بالتبسيط

$=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ الصورة الجذرية

**أتذكَّر**

- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

**4** $y=\sqrt{x^3}$

$y = x^{\frac{3}{2}}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ قاعدة مشتقة القوَّة

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ بالتبسيط

$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$ الصورة الجذرية

### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-6}$ b) $y = \frac{1}{x^3}$ c) $y = \sqrt{x^7}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهِّل عملية إيجاد مشتقة الاقترانات التي تتضمَّن حدودها اقترانات القوَّة.

## مفهوم أساسي — قواعد أُخرى للمشتقة

**مشتقة الثابت:**

إذا كان $y = c$، حيث $c$ عدد حقيقي، فإنَّ $\frac{dy}{dx} = 0$ ؛ أيْ إنَّ مشتقة الثابت تساوي صفرًا.

**مشتقة مضاعفات القوَّة:**

إذا كان $y = ax^n$ ، حيث $n$ و $a$ عددان حقيقيان، فإنَّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$ .

**مشتقة المجموع أو الفرق:**

إذا كان $y = u \pm v$ ، حيث $u$ و $v$ اقترانا قوَّة، فإنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ .

### مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $y = x^2 + 4\sqrt[4]{x}$

$y = x^2 + 4x^{\frac{1}{4}}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\frac{dy}{dx} = 2x^1 + 4 \times \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ قاعدة مشتقة اقتران القوَّة، وقاعدة مشتقة المجموع

$= 2x + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ قوانين الأسس

**2** $y = \dfrac{3 - 8x}{x}$

$$y = \frac{3}{x} - \frac{8x}{x}$$ بتوزيع البسط على المقام

$$= 3x^{-1} - 8$$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية، والاختصار

$$\frac{dy}{dx} = (-3)x^{-2} - 0$$ قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوَّة، والفرق

$$= -\frac{3}{x^2}$$ تعريف الأُسِّ السالب

**أتحقَّق من فهمي**

**أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:**

a) $y = \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{6}{x^2}$

b) $y = \dfrac{x^6 - 4x^5 - 8x^2}{4x^2}$

**رموز رياضية**

يشير الرمز $v$ إلى السرعة المتجهة التي تُسمّى اختصارًا السرعة في هذا الكتاب، في حين يشير الرمز $v_s$ إلى السرعة القياسية.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ السرعة اللحظية لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم تساوي مشتقة اقتران الموقع عند لحظة مُعيَّنة، والآن سأستعمل قواعد المشتقة التي تعرَّفْتُها في هذا الدرس لإيجاد السرعة اللحظية لأجسام تتحرَّك في مسار مستقيم، ويعطى موقعها في صورة اقترانات قوَّة.

## مثال 4

**يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 8t^{\frac{3}{2}} + t^2$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و $t$ الزمن بالثواني. أجد سرعة الجسم بعد ثانية واحدة من بدء حركته.**

السرعة هي مشتقة اقتران الموقع. وفي هذه الحالة، فإنَّ المطلوب هو إيجاد السرعة عندما $t = 1$.

$$v(t) = s'(t) = 12t^{\frac{1}{2}} + 2t$$ اقتران السرعة

$$v(1) = 12(1)^{\frac{1}{2}} + 2(1)$$ بتعويض $t = 1$

$$= 14$$ بالتبسيط

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 1$ هي: $14\ m/s$

### أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 + \sqrt{t}$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم بالأمتار، حيث $t$ الزمن بالثواني. أجد سرعة الجسم بعد 4 ثوانٍ من بدء حركته.

## أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة $x$ المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقة:

1) $f(x) = 4x^2, \quad x = 1$

2) $f(x) = 1 - x^2, \quad x = -2$

3) $f(x) = x^2 + x, \quad x = 2$

4) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال تعريف المشتقة:

5) $f(x) = 4x + 1$

6) $y = 1 - x$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

8) $y = \frac{2x + 4}{6}$

أستعمل القواعد لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

9) $y = \frac{1}{3}x + 1$

10) $y = 8 - 3x$

11) $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 7$

12) $y = \frac{2x^3 + 4x + 1}{4x}$

13) $y = \sqrt{8} + 3\sqrt{x}$

14) $y = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3}$

15) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 4$

16) $y = \frac{\sqrt[5]{x^7} + 4x - 1}{2}$

17 يُمثِّل الاقتران: $s(t)=5t^{\frac{3}{2}}-1.5t^2 , 0\leq t\leq 5$ موقع عدّاء يركض في مســـار مستقيم خلال 5 ثوانٍ، حيث $s$ موقع العدّاء بالأمتار، و$t$ الزمن بالثواني. أجد ســـرعة العدّاء بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

**يمثل الاقتران: $s(t) = t - 8 + \frac{6}{t}$، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و$t$ الزمن بالثواني.**

18 أجد الاقتران الذي يمثل سرعة الجسم.

19 أجد سرعة الجسم عندما $t = 1$، وعندما $t = 2$.

20 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

## مهارات التفكير العليا

21 **تبرير:** قال طارق إنَّه اســـتعمل الصيغة: $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ لإيجاد المشـــتقة اعتمادًا على التعريف العام للاقتران $f$، وإنَّ الناتج لن يتغيَّر في حال استعمل الصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

أُثبِت صحة ما قاله طارق، مُبرِّرًا إجابتي.

22 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 100 - 5t^2$، موقع جســـم يتحرَّك في مســـار مســـتقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و$t$ الزمن بالثواني. ما موقع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

23 **تحدٍّ:** أجد النقاط على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2$ إذا كان مماس المنحنى عندها أفقيًا.

الدرس 3

# التزايد والتناقص لكثيرات الحدود

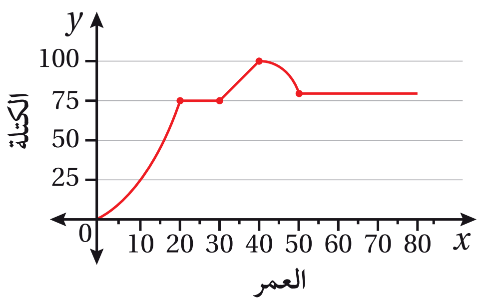
# Increasing and Decreasing of Polynomials

**فكرة الدرس** تحديد النقاط الحرجة، وفترات التزايد والتناقص لكثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.

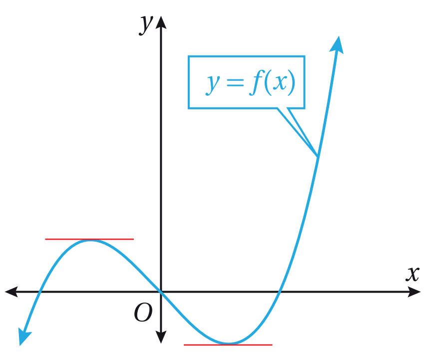
**المصطلحات** النقطة الحرجة، القيمة الحرجة، التزايد، التناقص، القيمة العظمى المحلية، القيمة الصغرى المحلية.

**مسألة اليوم** يُمثِّل المنحنى في الشكل المجاور التغيُّرات في كتلة جسم عمران:

- في أيِّ الفترات الزمنية زادت كتلة جسمه؟
- في أيِّ الفترات الزمنية لم تتغيَّر كتلة جسمه؟
- في أيِّ الفترات الزمنية نقصت كتلة جسمه؟




توجد على منحنى اقتران كثير الحدود $f$ المُبيَّن جانبًا نقطة واحدة على الأقل يُمكِن رسم مماس أفقي عندها، في ما يُعرَف **بالنقطة الحرجة** (critical point)، وهذا يعني أنَّ مشتقة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا، وأنَّه توجد **قيمة حرجة** (critical value) للاقتران عند الإحداثي $x$ للنقطة الحرجة.




**مثال 1**

**أجد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$ .**

$f'(x) = 2x - 4$ مشتقة الاقتران

$2x - 4 = 0$ بمساواة المشتقة بالصفر

$2x = 4$ بجمع 4 لكلا الطرفين

$x = 2$ بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن، توجد قيمة حرجة للاقتران $f$ عندما $x = 2$.

أمّا النقطة الحرجة على منحنى الاقتران $f$ فهي: $(2, f(2)) = (2, 3)$.

### أتحقَّق من فهمي

**أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:**

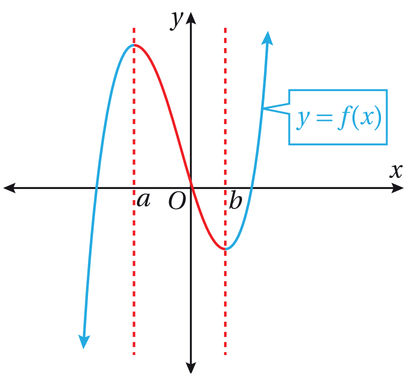
a) $f(x) = 6x^2 - 12x + 12$

b) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

**أتذكَّر**

إذا كان $a \times b = 0$، فإنَّ $a = 0$، أو $b = 0$، أو كُلًّا منهما يساوي صفرًا.

بالنظر إلى منحنى اقتران كثير الحدود $y = f(x)$ المُبيَّن جانبًا، أُلاحِظ أنَّ قِيَم $y$ تزداد في الفترة $-\infty < x < a$، والفترة $b < x < \infty$، وأنَّ منحنى الاقتران يرتفع من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا يكون الاقتران $f$ **متزايدًا** (increasing) فيهما.




**أتذكَّر**

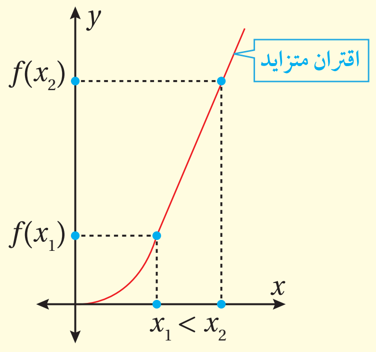
مجال الاقتران كثير الحدود هو جميع قِيَم $x$ الحقيقية؛ أي الفترة $(-\infty, \infty)$.

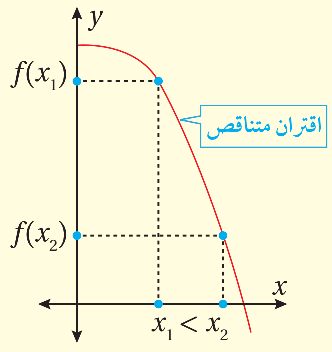
أُلاحِظ أيضًا أنَّ قِيَمَ $y$ تقل في الفترة $a < x < b$، وأنَّ منحنى الاقتران ينخفض من اليسار إلى اليمين؛ لذا يكون الاقتران $f$ **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

## مفهوم أساسي — تزايد الاقتران وتناقصه

إذا كان $f(x)$ اقترانًا معرفًا على الفترة المفتوحة $I$، فيكون:

- الاقتران $f$ متناقصًا في الفترة المفتوحة $I$ إذا كان لكل $x_1 < x_2$ في الفترة $f(x_1) > f(x_2)$.
- الاقتران $f$ متزايدًا في الفترة المفتوحة $I$ إذا كان لكل $x_1 < x_2$ في الفترة $f(x_1) < f(x_2)$.



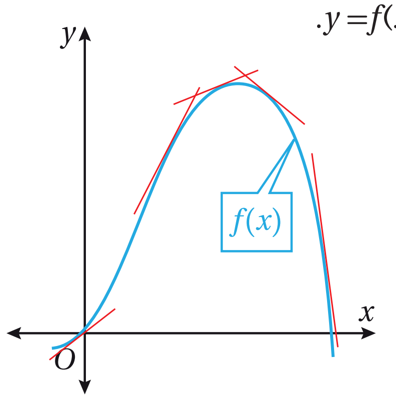



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مشتقة الاقتران عند نقطة ما تساوي ميل المماس عند هذه النقطة. ولكنْ، كيف يُمكِن استعمال المشتقة لدراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيِّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $y = f(x)$.

أُلاحِظ من الشكل أنَّ:

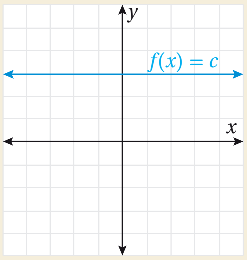
- المماسات ذات الميل الموجب مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماسات ذات الميل السالب مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.




ومن ثَمَّ، يُمكِن استعمال إشارة المشتقة لتحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران.

**أُفكِّر**

ما إشارة المشتقة للاقتران الثابت: $f(x) = c$، حيث $c$ عدد حقيقي؟




## نظرية

- إذا كان $f'(x) > 0$ لِقِيَم $x$ جميعها في الفترة $I$، فإنَّ الاقتران $f$ يكون متزايدًا على الفترة $I$.
- إذا كان $f'(x) < 0$ لِقِيَم $x$ جميعها في الفترة $I$، فإنَّ الاقتران $f$ يكون متناقصًا على الفترة $I$.

## مثال 2

**أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:**

**1** $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

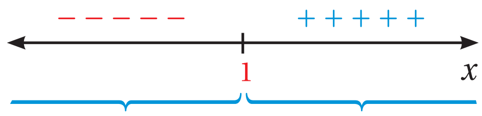
**الخطوة 1:** أجد مشتقة الاقتران، ثم أجد أصفارها.

| | |
|---|---|
| $f'(x) = 4x - 4$ | مشتقة الاقتران |
| $4x - 4 = 0$ | بمساواة المشتقة بالصفر |
| $4x = 4$ | بجمع 4 لكلا الطرفين |
| $x = 1$ | بقسمة كلا الطرفين على 4 |

إذن، صفر المشتقة هو: $x = 1$.

**الخطوة 2:** أبحث في إشارة المشتقة حول أصفارها.

أختار قيمة أكبر من صفر المشتقة (أيْ أكبر من 1)، وقيمة أُخرى أصغر منها، ثم أختبر إشارة المشتقة عند القيمتين:




| الفترة | $x < 1$ | $x > 1$ |
|---|---|---|
| قِيَم الاختبار $(x)$ | $x = 0$ | $x = 2$ |
| إشارة $f'(x)$ | $f'(0) < 0$ | $f'(2) > 0$ |
| سلوك الاقتران | متناقص ▼ | متزايد ▲ |

إذن، الاقتران $f$ متناقص في الفترة $(-\infty, 1)$، ومتزايد في الفترة $(1, \infty)$.

**2** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3$

**الخطوة 1:** أجد مشتقة الاقتران، ثم أجد أصفارها.

$f'(x) = -x^2 + x + 6$ مشتقة الاقتران

$-x^2 + x + 6 = 0$ بمساواة المشتقة بالصفر

$-(x^2 - x - 6) = 0$ بإخراج $-1$ عاملًا مشتركًا

$x^2 - x - 6 = 0$ بقسمة الطرفين على $-1$

$(x + 2)(x - 3) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

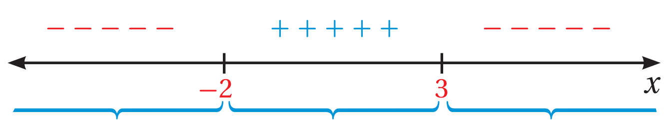
$(x + 2) = 0$ or $(x - 3) = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = -2$ $x = 3$ بحَلِّ المعادلتين الناتجتين

إذن، صفرا المشتقة هما: $x = -2$ , $x = 3$.

**الخطوة 2:** أبحث في إشارة المشتقة حول أصفارها.

أختار قيمة أكبر من 3، وقيمة ثانية تقع بين $-2$ و3، وقيمة ثالثة أصغر من $-2$، ثم أختبر إشارة المشتقة عند كلٍّ منها:




| الفترة | $x < -2$ | $-2 < x < 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|
| قِيَم الاختبار $(x)$ | $x = -3$ | $x = 0$ | $x = 4$ |
| إشارة $f'(x)$ | $f'(-3) < 0$ | $f'(0) > 0$ | $f'(4) < 0$ |
| سلوك الاقتران | متناقص ▼ | متزايد ▲ | متناقص ▼ |

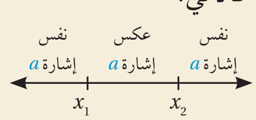
إذن، الاقتران $f$ متناقص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(3, \infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

### أتعلَّم

يُمكِن تمثيل منحنى الاقتران بيانيًّا على نحوٍ تقريبي بوصف سلوكه (تحديد فترات تزايده وفترات تناقصه).

### أتعلَّم

إذا كان للاقتران التربيعي: $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان، هما: $x_1$ و $x_2$، فإنَّه يُمكِن تحديد الإشارة على جانبي الصفرين وبينهما كالآتي:



### أتعلَّم

- الاقتران $f(x) = x^3$ هو اقتران متزايد دائمًا؛ لأنَّ $f'(x) \geq 0$ لقِيَم $x$ جميعها.
- الاقتران $f(x) = -x^3$ هو اقتران متناقص دائمًا؛ لأنَّ $f'(x) \leq 0$ لقِيَم $x$ جميعها.

### أتحقَّق من فهمي

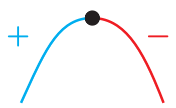
أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

**a)** $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$

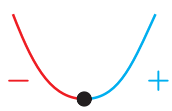
**b)** $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

يُمكِن استعمال المشتقة لتصنيف النقاط الحرجة لكثيرات الحدود كما يأتي:

- **النقطة العظمى المحلية** (local maximum point): نقطة حرجة يتزايد منحنى الاقتران عن يسارها، ويتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من الموجب إلى السالب عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها.




- **النقطة الصغرى المحلية** (local minimum point): نقطة حرجة يتناقص منحنى الاقتران عن يسارها، ويتزايد عن يمينها؛ ما يعني أنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من السالب إلى الموجب عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها.




### مثال 3

إذا كان الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$، فأستعمل المشتقة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

**1** إيجاد النقاط الحرجة للاقتران $f$.

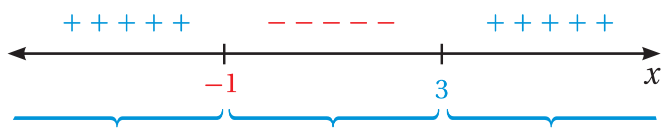
| | |
|---|---|
| $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | مشتقة الاقتران |
| $3x^2 - 6x - 9 = 0$ | بمساواة المشتقة بالصفر |
| $3(x^2 - 2x - 3) = 0$ | بإخراج 3 عاملًا مشتركًا |
| $x^2 - 2x - 3 = 0$ | بالقسمة على 3 |
| $(x+1)(x-3) = 0$ | بالتحليل إلى العوامل |
| $(x+1) = 0$ or $(x-3) = 0$ | خاصية الضرب الصفري |
| $x = -1 \qquad x = 3$ | بحَلِّ المعادلتين الناتجتين |

عندما $x = -1$، فإنَّ $y = 4$.

عندما $x = 3$، فإنَّ $y = -28$.

إذن، النقاط الحرجة هي: $(3, -28)$، و$(-1, 4)$.

**2** **تصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية، وصغرى محلية.**




| الفترة | $x < -1$ | $-1 < x < 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|
| قِيَم الاختبار $(x)$ | $x = -4$ | $x = 0$ | $x = 4$ |
| إشارة $f'(x)$ | $f'(-4) > 0$ | $f'(0) < 0$ | $f'(4) > 0$ |
| سلوك الاقتران | متزايد ▲ | متناقص ▼ | متزايد ▲ |

إذن، النقطة $(-1, 4)$ عظمى محلية؛ لأنَّ الاقتران متزايد عن يسارها، ومتناقص عن يمينها، والنقطة $(3, -28)$ صغرى محلية؛ لأنَّ الاقتران متناقص عن يسارها، ومتزايد عن يمينها.

### أتحقَّق من فهمي

**إذا كان الاقتران: $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x + 8$، فأستعمل المشتقة للإجابة عن السؤالين الآتيين:**

a) إيجاد النقاط الحرجة للاقتران $f$.

b) تصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية، وصغرى محلية.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باقترانات، يستفاد من تحديد تزايدها أو تناقصها، وتحديد قِيَمها العظمى أو قِيَمها الصغرى.

### مثال 4 : من الحياة

**درجات حرارة: يُمثِّل الاقتران الآتي درجة الحرارة لجسم مريض بعد $t$ يومًا من دخوله المستشفى:**

$$T(t) = -0.1t^2 + 1.2t + 38, \quad t \geq 0$$

**حيث $T$ درجة الحرارة بالسيلسيوس $(^{o}C)$. أُحدِّد أعلى درجة حرارة للمريض، واليوم الذي سُجِّلت فيه، علمًا بأنَّه تلقّى العلاج في المستشفى مدَّة 12 يومًا.**

**الخطوة 1:** أجد مشتقة الاقتران المعطى.

$$T'(t) = -0.2t + 1.2$$ مشتقة الاقتران

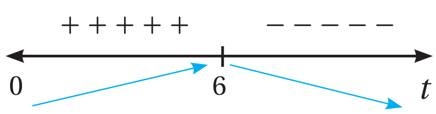
**الخطوة 2 :** أجد أصفار المشتقة.

$$-0.2t + 1.2 = 0$$ بمساواة المشتقة بالصفر

$$-0.2t = -1.2$$ بطرح 1.2 من طرفي المعادلة

$$t = 6$$ بالقسمة على $-0.2$

**الخطوة 3 :** أُحدِّد إشارة المشتقة حول أصفارها.




**الخطوة 4 :** أُحدِّد القِيَم العظمى والقِيَم الصغرى.

منحنى الاقتران $T$ متزايد عن يسار $t = 6$، ومتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ للاقتران $T$ قيمة عظمى محلية عندما $t = 6$، وهي:

$$T(6) = -0.1(6)^2 + 1.2(6) + 38 = 41.6$$ بتعويض $t = 6$

إذن، أعلى درجة حرارة للمريض هي $41.6°C$، وقد سُجِّلت في اليوم السادس من بدء علاجه.

### أتحقَّق من فهمي

**لوحِظ أنَّ عدد الضفادع في بحيرة ما يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيث $P$ عدد الضفادع، و$t$ الزمن بالأشهر منذ بدء ملاحظة الضفادع. أجد أكبر عدد يُمكِن أنْ تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.**

### معلومة

يختلف مدى درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية مع التقدُّم بالعُمُر على النحو الآتي:

- الرُّضَّع والأطفال: من $36.6°C$ إلى $37.2°C$
- البالغون: من $36.1°C$ إلى $37.2°C$
- كبار السن ( أكثر من 65 عامًا): قد تنخفض إلى $36.2°C$

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

**أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:**

1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$
2. $f(x) = 1 - 12x + 2x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$
4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

6 $f(x) = 7 - 5x$

5 $f(x) = 4x + 3$

8 $f(x) = x^2 - x$

7 $f(x) = x^2 + 7$

10 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

9 $f(x) = x^2 - 5x + 2$

12 $f(x) = (1 - x)^2$

11 $f(x) = (x - 3)^2$

14 $f(x) = 6 - x - x^3$

13 $f(x) = x^3 + 3x$

16 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

15 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

18 $y = \frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 30x$

17 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

20 $h(x) = -(x - 2)^2 + 1$

19 $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 8x$

21 **صناعة:** تُنتِج إحدى الشركات صناديق لتخزين البضائع على شكل متوازي مستطيلات. إذا أمكن نمذجة حجم كلٍّ من هذه الصناديق بالاقتران: $V(t) = 18x - \frac{2}{3}x^3$، فأجد قيمة $x$ التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

22 إذا كانت مشتقة الاقتران $f$ تعطى بالاقتران: $g(x) = (x-2)^2(x+4)$، فأجد قِيَم $x$ التي توجد عندها نقاط حرجة للاقتران $f$.

## مهارات التفكير العليا

23 **تبرير:** أُبيِّن أنَّ الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ متزايد لقِيَم $x$ الحقيقية جميعها، مُبرِّرًا إجابتي.

24 **تحدٍّ:** إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^2 - 4x + c$، حيث $a$ و $c$ عددان حقيقيان، نقطة حرجة هي $(2, -7)$، فما قيمة كلٍّ من $a$ و $c$؟

**أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:**

**1** إذا كان الاقتران: $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\geq 2\\ 2x+1, & x<2\end{cases}$ ، فإنَّ قيمة $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ هي:

a) 5 b) 4

c) 3 d) 2

**2** إذا كان الاقتـــران: $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & -3\leq x<1\\ x-5, & x\geq 1\end{cases}$ ، فإنَّ قيمة $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ هي:

a) $-4$ b) $0$

c) $-5$ d) غير موجودة

**3** إذا كان: $y=2x^4-5x^3+2$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $8x^3-5x^2$ b) $8x^4-15x^2$

c) $8x^3-15x^2$ d) $8x^3-15x^2+2$

**4** إذا كان الاقتران: $f(x)=(x-3)^2$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x-3$ b) $x-6$

c) $2x-6$ d) $2x$

**5** إذا كان: $y=\frac{3x^4+9x^2}{3x}, x\neq 0$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $x^3+3x$ b) $3x^2+3$

c) $\frac{4x^4+18x}{3}$ d) $4x^3+6x$

**6** إذا كان الاقتران: $f(x)=12x^{\frac{2}{3}}$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ b) $8\sqrt[3]{x}$

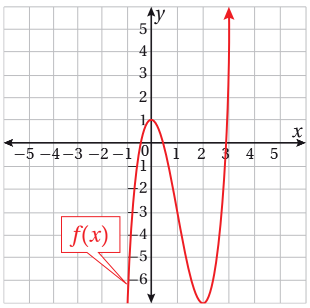
c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$ d) $\frac{8}{\sqrt[3]{x}}$

**7** قيمـــة (أو قِيَـم) $x$ التـــي يكـــون عندهـــا الاقتـــران: $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ غير متصل هي:

a) $x=1$ b) $x=-1$

c) $x=\pm 1$ d) $x=0\ ,\ x=1$

**8** الفتـــرة (أو الفترات) التـــي يتناقـــص فيهـــا الاقتـــران $f$ المعطـــى تمثيلـــه البيانـــي فـــي الشكل المجاور هي:




a) $(-\infty, 0)\ ,\ (2, \infty)$ b) $(-7, 1)$

c) $(1, 2)$ d) $(0, 2)$

**أجد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):**

**9** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{9-x^2}$

**10** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^3-1}$

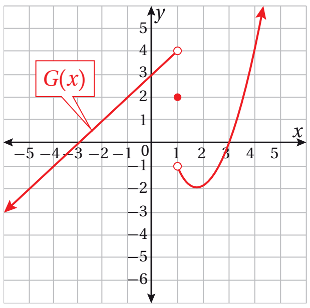
**11** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+3x}{x}$

**12** $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

**13** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$

**14** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

أعتمد التمثيل البياني لإيجاد قيمة كل نهاية ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):




**15** $\lim\limits_{x \to 1} G(x)$

**16** $\lim\limits_{x \to -2} G(x)$

**17** $\lim\limits_{x \to -3} G(x)$

أُحدِّد إذا كان كل اقتران ممّا يأتي متصلًا عند قيمة $x$ المعطاة، مُبرِّرًا إجابتي:

**18** $f(x)=3x-2, \quad x = 2$

**19** $g(x)=\frac{1}{x^2}, \quad x = 0$

**20** $h(x) = \begin{cases} 3x+5 & , x < -2 \\ x+1 & , x \geq -2 \end{cases}, \quad x = -2$

**21** $q(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 10x}{x-5} & , x \neq 5 \\ x+5 & , x = 5 \end{cases}, \quad x = 5$

**ألعاب إلكترونية:** توقَّع مُحلِّلو قسم المبيعات في شركة أنتجت لعبة إلكترونية جديدة أنَّ عدد النسخ التي ستبيعها من هذه اللعبة يعطى بالاقتران: $f(x)= -x^2+300x+6$، حيث: $0 \leq x \leq 300$، عندما تُنفِق الشركة $x$ من مئات الدنانير على إعلانات إشهار اللعبة وترويجها:

**22** أُحدِّد النقاط الحرجة للاقتران $f$.

**23** ما أكبر عدد من الألعاب الإلكترونية التي قد تبيعها الشركة، والمبلغ الذي ستُنفِقه على إعلانات إشهارها وترويجها؟

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة:

**24** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

**25** $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8$

## تدريب على الاختبارات الدولية

**26** إذا كان الاقتران: $f(x)=\pi^2$، فإنَّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\pi^2$ b) $2\pi$ c) $0$ d) $2$

**27** يوجد للاقتران: $f(x)=4x^2+6x+3$ قيمة حرجة عندما تساوي $x$:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

**28** إذا كان الاقتران: $f(x)=x^3-3x^2+x$، فإنَّ $f'(-1)$ تساوي:

a) $10$ b) $-8$ c) $-10$ d) $8$

**29** إذا كان الاقتران: $f(x)=x^2+2x+1$، فإنَّ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ تساوي:

a) $4$ b) $6$ c) $8$ d) $10$

**30** إذا كان: $y = \frac{6x^2 - 8x + 4}{2}$، فإنَّ $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=0$ تساوي:

a) $6$ b) $4$ c) $-6$ d) $-4$

الوحدة

6

# المتتاليات والمتسلسلات

# Sequences and Series

## ما أهمية هذه الوحدة؟

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال المتتاليات والمتسلسلات، وهي أنماط عددية؛ ما يساعد على تحليل تلك المواقف وفهمها. تظهر المتتاليات في العديد من المخلوقات، مثل: زهرة دوّار الشمس، وصدفة الحلزون، ويُمكِن عن طريقها إجراء حسابات دقيقة عن تلك المخلوقات.

## تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إكمال نمط عددي معطى.
- ✓ تحديد المجال والمدى لاقترانات كثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد الحد العام لكلٍّ من المتتالية التربيعية، والمتتالية التكعيبية.
- ✓ التعبير عن الأنماط الهندسية بمتتاليات عددية.

## سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- المتسلسلات، وعلاقتها بالمتتاليات.
- المتتاليات والمتسلسلات الحسابية المنتهية.
- المتتاليات والمتسلسلات الهندسية المنتهية.
- المتتاليات والمتسلسلات الهندسية اللانهائية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (15) و (16) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

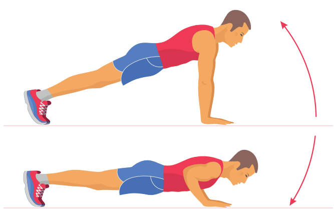
# الدرس 1

# المتتاليات والمتسلسلات
## Sequences and Series

**فكرة الدرس** تعرُّف المتسلسلة المنتهية، وإيجاد مجموعها.

**المصطلحات** المتسلسلة، المتسلسلة المنتهية، المتسلسلة غير المنتهية، رمز المجموع، مجموع المتسلسلة.

**مسألة اليوم** يمارس هيثم تمارين الضغط بانتظام، وقد استطاع أداء 25 ضغطة في الأسبوع الأول، ثم تمكَّن من زيادة عددها أسبوعيًّا بمقدار 10 ضغطات. ما عدد الضغطات التي يُمكِنه أداؤها بعد 16 أسبوعًا؟



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ **المتتالية** هي مجموعة من الأعداد تَتْبَع ترتيبًا مُعيَّنًا، وأنَّ كل عدد فيها يُسمّى حدًّا. تكون المتتالية **منتهية** إذا حوت عددًا منتهيًا من الحدود، وتكون **غير منتهية** إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

| متتالية غير منتهية | متتالية منتهية |
| --- | --- |
| 2, 4, 6, 8, … | 2, 4, 6, 8 |

تُعَدُّ المتتالية اقترانًا مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية؛ إذ يرتبط كل عدد صحيح في المجال بعدد حقيقي في المدى، هو أحد حدود المتتالية.

| | | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| المجال | 1, | 2, | 3, | 4, | …, | $n$ |
| المدى | $a_1$, | $a_2$, | $a_3$, | $a_4$, | …, | $a_n$ |
| | الحد الأول | الحد الثاني | الحد الثالث | الحد الرابع | | الحد العام |

عند وضع إشارات جمع (+) بين حدود المتتالية بدلًا من الفواصل، فإنَّها تُسمّى **متسلسلة** (series).

**أتذكَّر**

الحد العام هو علاقة تربط كل حد في المتتالية برتبته. ويُمكِن استعمال الحد العام لإيجاد قيمة أيِّ حد في المتتالية، وذلك بتعويض رتبة ذلك الحد في الحد العام.

وكما هو حال المتتالية، فإنَّ المتسلسلة تكون منتهية إذا حوت عددًا منتهيًا من الحدود، وتكون غير منتهية إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

| متسلسلة غير منتهية | متسلسلة منتهية |
|---|---|
| $1+2+3+4+5+\ldots$ | $1+2+3+4+5$ |

يُمكِن التعبير عن المتسلسلة بطريقة مختصرة باستعمال **رمز المجموع** ($\sum$) (sigma notation) على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

آخر قِيَم $k$ ⟵ $n$

أول قِيَم $k$ ⟵ $k=1$

الحد العام للمتتالية ⟵ $a_k$

فمثلًا، يُمكِن التعبير عن المتسلسلتين السابقتين باســتعمال رمز المجموع $\sum$ (يُقرَأ: سيغما) كما يأتي:

$$1+2+3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} k \qquad 1+2+3+4+5=\sum_{k=1}^{5} k$$

**لغة الرياضيات**

يُقــرَأ ($\sum_{k=1}^{5} k$): مجمــوع ($k$) مــن ($k=1$) إلــى ($k=5$).

## مثال 1

**أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:**

**1** $\mathbf{2+4+6+\ldots+28}$

أُلاحِظ أنَّ الحد الأول يساوي $2(1)$، وأنَّ الحد الثاني يساوي $2(2)$، وأنَّ الحد الثالث يساوي $2(3)$، وأنَّ الحد الأخير يساوي $2(14)$.

إذن، يُمكِن كتابة حدود المتتالية على النحو الآتي:

$$k=1, 2, 3, \ldots, 14 \qquad a_k=2k$$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{14}(2k)$$

**2** $5 + 9 + 13 + 17 + \ldots$

أُلاحِظ أنَّ الحد الأول يساوي $4(1)+1$، وأنَّ الحد الثاني يساوي $4(2)+1$، وأنَّ الحد الثالث يساوي $4(3)+1$.

إذن، يُمكِن كتابة حدود المتسلسلة على النحو الآتي:

$$a_k = 4k+1 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)$$

**أتحقَّق من فهمي**

**أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:**

a) $3 + 6 + 9 + \ldots + 27$

b) $3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$

يُمكِن إيجاد **مجموع المتسلسلة** (sum of series) المنتهية بجمع حدودها. فمثلًا، إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، فإنَّني أستعمل الحد العام لإيجاد حدودها، ثم جمعها.

**مثال 2**

**أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{7}(2k^2-1)$.**

أُعوِّض القِيَم: $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ في الحد العام للمتسلسلة، وهو $a_k=2k^2-1$:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 1 | 7 | 17 | 31 | 49 | 71 | 97 |

إذن، مجموع المتسلسلة هو:

$$\sum_{k=1}^{7}(2k^2-1) = 1 + 7 + 17 + 31 + 49 + 71 + 97$$ حدود المتسلسلة

$$= 273$$ بالجمع

**أتحقَّق من فهمي**

**أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{11}(5k-3)$.**

**أُفكِّر**

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{10}1$.

إذا كان في المتسلسلة عدد كبير من الحدود، فإنَّ إيجاد مجموعها لن يكون سهلًا. ولكنْ توجد قواعد يُمكِن استعمالها لإيجاد مجموع بعض المتسلسلات الخاصة على نحوٍ سهل كما يأتي.

## مفهوم أساسي

### صيغ لمجموع حالات خاصة من المتسلسلات

- مجمـــوع الحد الثابـــت $(c)$ إلى نفســـه $(n)$ من المرّات. $\sum_{k=1}^{n} c = n \times c$
- مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من $(1)$ إلى $(n)$. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من $(1)$ إلى $(n)$. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### مثال 3 : من الحياة

**فاكهة: يعرض محل لبيع الفاكهة البرتقال مُرتَّبًا في طبقات تُشكِّل هرمًا رباعيًّا كما في الصورة المجاورة. أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد حبّات البرتقال في الهرم، ثم أجد مجموع المتسلسلة.**

**معلومة**

يُعَدُّ البرتقال مصدرًا رئيسًا للألياف والفيتامينات، لا سيَّما فيتامين $c$.

**الخطوة 1:** أُنشِئ جدولًا أكتب فيه عدد حبّات البرتقال في أول ثلاث طبقات، بدءًا بقمَّة الهرم.

| الطبقة | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| عدد حبّات البرتقال في الطبقة | 1 | 4 | 9 |

**الخطوة 2 :** أجد الحد العام للمتتالية التي يُمثِّلها عدد حبّات البرتقال في كل طبقة.

أُلاحِظ أنَّ الحد الأول في هذه المتتالية يساوي $1^2$، وأنَّ الحد الثاني يساوي $2^2$، وأنَّ الحد الثالث يساوي $3^2$.

إذن، يُمكِن كتابة الحد العام لهذه المتتالية على النحو الآتي:

$$a_k = k^2 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

**الخطوة 3 :** أستعمل رمز المجموع للتعبير عن عدد حبّات البرتقال على شكل متسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{6} k^2$$

**الخطوة 4 :** أجد مجموع المتسلسلة.

أستعمل الصيغة: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لإيجاد مجموع المتسلسلة على النحو الآتي:

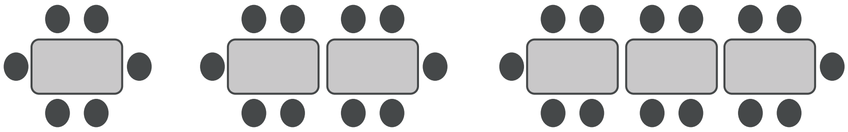
$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6+1)(12+1)}{6} = \frac{6\times 7\times 13}{6} = 91$$

إذن، عدد حبّات البرتقال في الهرم هو 91 حبَّة.

تحتوي المكتبة المدرسية على كتب قيِّمة في مختلف العلوم؛ لذا يتعيَّن على كل طالب وطالبة وضع برنامج زمني لاستعارة بعض هذه الكتب وقراءتها؛ فهي تُنمّي المعرفة، وتصقل الشخصية.

### أتحقَّق من فهمي

**مكتبات:** **رُتِّبت الطاولات في مكتبة المدرسة بحيث تحيط بها الكراسي كما في الشكل الآتي:**



**أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد الكراسي في المكتبة، ثم أجد مجموع المتسلسلة.**

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

**أكتب كُلًّا من المتسلسلات الآتية باستعمال رمز المجموع:**

1) $1 + 6 + 11 + 16 + \dots$

2) $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$

3) $2 + 5 + 10 + 17 + 26$

4) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$

5) $25 + 50 + 75 + \cdots + 200$

6) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

8) $\sum_{k=1}^{10} (k^2-1)$

7) $\sum_{k=1}^{5} (k+2)$

10) $\sum_{k=1}^{5} k$

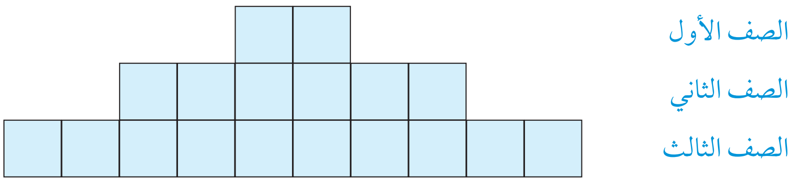
9) $\sum_{k=1}^{40} (-5)$

12) $\sum_{k=1}^{55} 9$

11) $\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$

13) **بنــاء:** بنى عامل جدارًا يحوي 20 صفًّا من الطوب، وقد أراد إضفاء لمســة جمالية عليه، فوضع 80 طوبة مُلوَّنة في الصف الأول (السفلي)، ثم وضع في كل صف يعلوه عددًا من الطوب المُلوَّن يقل بمقدار طوبتين عن عدد الطوب المُلوَّن في الصف السابق له. أســتعمل رمز المجموع لكتابة متسلسلة تُمثِّل مجموع الطوب المُلوَّن الذي استعمله العامل في بناء الجدار، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

14) **هندسة:** أستعمل رمز المجموع لكتابة متسلسلة تُمثِّل مجموع المربعات في الشكل الآتي عندما يصبح عدد الصفوف فيه $(n)$:




15) أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

## مهارات التفكير العليا

16) **أكتشف الخطأ:** أوجدت ولاء مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{5} (2k+7)$ على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{5}(2k+7) = 2(1+2+3+4+5)+7$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ ولاء، ثم أُصحِّحه.

17) **أكتشف المختلف:** أيُّ الآتية مختلف عن الثلاثة الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\sum_{i=0}^{5} i^2$ | $1+4+9+16+25+36$ | $91$ | $\sum_{i=1}^{6} i^2$

18) **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $\sum_{k=1}^{n} c = n \times c$، حيث $c$ عدد حقيقي.

الدرس 2

# المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

## Arithmetic Sequences and Series

**فكرة الدرس** تعرُّف المتتالية الحسابية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية.

**المصطلحات** المتتالية الحسابية، أساس المتتالية الحسابية، المتسلسلة الحسابية.

**مسألة اليوم** اصطفَّ أعضاء فِرقة الكشّافة المدرسية في اثني عشر صفًّا، بحيث وقف في الصف الأول ثلاثة أعضاء، ووقف في كل صف يلي الصف الأول عضوان أكثر ممّا في الصف الذي يسبقه مباشرة. كيف يُمكِن حساب العدد الكلي لأعضاء الفِرقة؟

**أتعلَّم**

تُعَدُّ المتتاليات الخطية من المتتاليات الحسابية.

إذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين في متتالية عددية يساوي قيمة ثابتة، فإنَّ هذه المتتالية تُسمّى **متتالية حسابية** (arithmetic sequence)، ويُسمّى الفرق الثابت **أساس المتتالية الحسابية** (common difference)، ويُرمَز إليه بالحرف $d$.

**مفهوم أساسي** **المتتالية الحسابية**

**بالكلمات:** تكون المتتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد فيها والحد الذي يسبقه يساوي قيمة ثابتة.

**بالرموز:** تكون المتتالية: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ حسابية إذا كان:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$$

### مثال 1

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

**1** $2, 5, 8, 11, \ldots$

أطرح كل حدين متتاليين:

$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$ بطرح الحد الأول من الحد الثاني

$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$ بطرح الحد الثاني من الحد الثالث

بطرح الحد الثالث من الحد الرابع $a_4-a_3 = 11-8=3$

أُلاحِظ أنَّ الفرق ثابت، وأنَّه يساوي 3؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $d=3$.

إذن، المتتالية: $2, 5, 8, 11, \ldots$ حسابية.

**2** $49, 45, 40, 34$

أطرح كل حدين متتاليين:

بطرح الحد الأول من الحد الثاني $a_2-a_1 = 45-49=-4$

بطرح الحد الثاني من الحد الثالث $a_3-a_2 = 40-45=-5$

بطرح الحد الثالث من الحد الرابع $a_4-a_3 = 34-40=-6$

أُلاحِظ أنَّ الفرق غير ثابت.

إذن، المتتالية: $49, 45, 40, 34$ ليست حسابية.

### أتعلَّم

يُمكِن استنتاج أنَّ الحد الخامس في هذه المتتالية هو: $a_5=11+3=14$.

ما قيمة الحد السابع فيها؟

### أتحقَّق من فهمي

**أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:**

a) $-7, 1, 9, 17, \ldots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, \ldots$

c) $5, 2, -2, -5, -9, \ldots$

يُمكِن إيجاد الحد العام $(a_n)$ للمتتالية الحسابية التي حدها الأول $a_1$، وأساسها $d$، باستعمال الصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

### مثال 2

**أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:**

**1** $5, 7, 9, 11, \ldots$

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحد الأول $a_1=5$، والأساس $d=7-5=2$ في صيغة الحد العام:

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية $a_n = a_1 + (n-1)d$

| | |
|---|---|
| بتعويض $d=2\ ,\ a_1=5$ | $= 5 + (n-1)2$ |
| بالتبسيط | $= 2n + 3$ |

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 2n + 3$

**2** $\boldsymbol{a_8 = 55, d = 7}$

أستعمل الحد الثامن $a_8$، والأساس $d$ لإيجاد الحد الأول $a_1$:

| | |
|---|---|
| صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية | $a_n = a_1 + (n-1)d$ |
| بتعويض $n=8$ | $a_8 = a_1 + (8-1)d$ |
| بتعويض $d=7,\ a_8=55$ | $55 = a_1 + (7)7$ |
| بالتبسيط | $a_1 = 6$ |

أُعوِّض قيمة كلٍّ من $a_1$ و $d=7$ في صيغة الحد العام:

| | |
|---|---|
| صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية | $a_n = a_1 + (n-1)d$ |
| بتعويض $d=7,\ a_1=6$ | $a_n = 6 + (n-1)7$ |
| بالتبسيط | $a_n = 7n - 1$ |

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 7n - 1$

**3** $\boldsymbol{a_7 = 17, a_{26} = 93}$

**الخطوة 1:** أستعمل صيغة الحد العام: $a_n = a_1 + (n-1)d$ لكتابة نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمُتغيِّرين.

| | |
|---|---|
| صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية | $a_n = a_1 + (n-1)d$ |
| بتعويض $n=7,\ a_7=17$ | $17 = a_1 + (7-1)d$ |
| بالتبسيط | $17 = a_1 + 6d \quad \ldots\ldots (1)$ |
| بتعويض $n=26,\ a_{26}=93$ | $93 = a_1 + (26-1)d$ |
| بالتبسيط | $93 = a_1 + 25d \quad \ldots\ldots (2)$ |

**الخطوة 2:** أحُلُّ المعادلة (1) والمعادلة (2) بالحذف.

| | |
|---|---|
| بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) | $76 = 19d$ |

**أتذكَّر**

من طرائق حَلِّ النظام المُكوَّن من معادلتين خطيتين: الحذف، والتعويض.

بقسمة طرفي المعادلة الناتجة على 19 $d=4$

بتعويض قيمة $d$ في المعادلة (1) $17=a_1+6\times4 \quad \dots\dots (1)$

بالتبسيط $a_1=-7$

**الخطوة 3 :** أُعوِّض قيمة كلٍّ من $a_1$ و $d$ في صيغة الحد العام للمتتالية.

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية $a_n = a_1 + (n-1)d$

بتعويض $d=4,\ a_1=-7$ $a_n = -7 + (n-1)4$

بالتبسيط $a_n = 4n - 11$

إذن، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 4n - 11$

**أتحقَّق من فهمي**

**أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:**

a) $30, 25, 20, 15, \dots$

b) $a_{10}=-11,\ d=2$

c) $a_7=71,\ a_{16}=26$

**أتذكَّر**

بمعرفة الحد العام للمتتالية الحسابية، يُمكِن إيجاد قيمة أيِّ حد فيها إذا عُلِمت رتبته $(n)$. فمثلًا، قيمة الحد السابع والثمانين في المتتالية الحسابية التي حدها العام $a_n = 4n - 11$ هي:

$a_{87} = 4(87)-11 = 337$

تنتج **المتسلسلة الحسابية** (arithmetic series) من جمع حدود المتتالية الحسابية. ويُمكِن إيجاد مجموع أول $n$ حدًّا (يُرمَز إليه بـ $S_n$) من حدود المتسلسلة الحسابية باستعمال الصيغة الآتية:

$$S_n=n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

حيث:

$a_1$: حد المتسلسلة الأول.

$a_n$: حد المتسلسلة الأخير.

من المُلاحَظ أنَّ المجموع $S_n$ يتكوَّن من الوسط الحسابي لكلٍّ من الحد الأول والحد الأخير مضروبًا في عدد الحدود التي يراد جمعها.

**أتعلَّم**

يُمكِن إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية، ولا يُمكِن إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية غير المنتهية.

### مثال 3

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{30} (2k-1)$.

**الخطوة 1:** أُحدِّد نوع المتسلسلة بكتابة أول ثلاثة حدود منها على الأقل، إضافةً إلى الحد الأخير فيها.

$$a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$
$$a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$
$$a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$$
$$a_{30} = 2 \times 30 - 1 = 59$$

أُلاحِظ أنَّ المتتالية: $1, 3, 5, \ldots, 59$ حسابية، وأنَّ أساسها هو: $d=2$.

**الخطوة 2:** أُعوِّض قيمة $a_1=1$، وقيمة $a_{30}=59$، وقيمة $n=30$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية.

$S_n = n(\frac{a_1+a_n}{2})$ صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

$S_n = 30(\frac{1+59}{2})$ بتعويض $n=30, a_{30}=59, a_1=1$

$= 900$ بالتبسيط

إذن، مجموع حدود هذه المتسلسلة الحسابية هو 900

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{20} (4k+6)$.

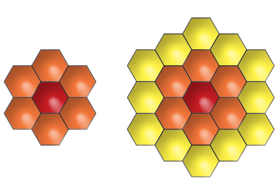
**أتعلَّم**

إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع $\Sigma$، وكانت قاعدة حدودها: $dk \pm c$، فهي متسلسلة حسابية، وأساسها $d$.

يُمكِن استعمال مجموع المتسلسلة الحسابية في كثير من التطبيقات الحياتية.

### مثال 4: من الحياة

**نحل: يصنع النحل خليته الأولى في صورة شكل سداسي منتظم، ثم يحيطها بحلقات من الخلايا المُطابِقة للخلية الأولى كما في الشكل المجاور:**



1 **أُبيِّن أنَّ عدد الخلايا المضافة في الحلقات التي تحيط بالخلية الأولى يُشكِّل متتالية حسابية.**

عدد الخلايا في الحلقات المتتالية هو: $6, 12, 18, \ldots$

أُلاحِظ أنَّ الفرق بين كل عددين متتاليين في هذا النمط يساوي 6.

إذن، يُمثِّل عدد الخلايا المضافة في الحلقات متتالية حسابية أساسها: $d=6$.

**2 أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.**

أُعوِّض أساس المتتالية الحسابية وحدها الأول في صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

$a_n = 6 + (n-1)6$ بتعويض $a_1=6, d=6$

$= 6n$ بالتبسيط

إذن، الحد العام للمتتالية الحســـابية هو $a_n=6n$، وهذا الحد يُمثِّل عدد الخلايا التي تحويها $n$ من الحلقات.

**3 أجد عدد الخلايا في 10 حلقات.**

**الخطوة 1:** أكتب المتسلسلة الحسابية التي تُمثِّل عدد الخلايا في 10 حلقات.

$$\sum_{k=1}^{10} 6k$$

**الخطوة 2:** أجد الحد الأخير في المتسلسلة.

الحد الأخير هو الحد العاشر $(a_{10})$:

$a_n = 6n$ صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

$a_{10} = 6(10)$ بتعويض $n=10$

$=60$ بالتبسيط

**الخطوة 3:** أُعوِّض قيمة $a_1=6$، وقيمة $a_{10}=60$، وقيمة $n=10$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

$S_n = 10\left(\frac{6+60}{2}\right)$ بتعويض $a_1=6, a_{10}=60, n=10$

$= 330$ بالتبسيط

### أتحقَّق من فهمي

**مقاعد: يوجد في الصف الأول من المقاعد في أحد المسارح 13 مقعدًا، وفي الصــف الثاني 16 مقعدًا، وفي الصف الثالث 19 مقعدًا، ... وهكذا حتى الصف الأخير في المسرح:**

a) أُبيِّن أنَّ عدد المقاعد في صفوف المسرح يُشكِّل متتالية حسابية.

b) أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.

c) إذا كان في المسرح 25 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا في المسرح؟

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

**أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:**

1) $-9, -5, -1, 3, \ldots$

2) $0, 4, 9, 14, \ldots$

3) $27, 21, 15, 9, \ldots$

4) $-2, -4, -6, -8, \ldots$

5) $-7, 0, 7, 14, \ldots$

6) $5, 10, 20, 40, \ldots$

**أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي:**

7) $8, 18, 28, 38, \ldots$

8) $45, 40, 35, 30, \ldots$

9) $a_5=7 , d=3$

10) $a_{21}=41 , d=-2$

11) $a_7=58 , a_{11}=94$

12) $a_6=-8 , a_{15}=-62$

**أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:**

13) $\sum_{k=1}^{25} (5k-7)$

14) $\sum_{k=1}^{31} (23-4k)$

15) $\sum_{k=1}^{17} (k+6)$

16) $\sum_{k=1}^{15} (16-k)$

17) $\sum_{k=1}^{13} (2k)$

18) $\sum_{k=1}^{99} (3k-4)$

**معلومة**

عنترة بن شدّاد العبسي هو أحد أشهر شعراء العرب وفرسانها في عصر ما قبل الإسلام، وقد اشتُهِر بشِعْر الفروسية الجميل.

19 **شِعْر:** حفظ محمد في أحد الأيام 4 أبيات من قصيدة لعنترة بن شدّاد، وحفظ في اليوم الثاني 7 أبيات أخرى من هذه القصيدة، وحفظ في اليوم الثالث 10 أبيات أخرى منها. أجد عدد الأبيات التي سيحفظها محمد من هذه القصيدة في نهاية اليوم السادس إذا استمر في الحفظ وَفق النمط نفسه.

20 **ثقافة مالية:** اقترض عيسى مبلغًا من صديقه؛ على أنْ يعيده إليه خلال 8 أشهر في صورة دفعات شهرية، قيمة الدفعة الأولى منها JD 100، وأنْ يزيد هذه القيمة بمقدار JD 20 كل شهر، بدءًا بالشهر الثاني. ما المبلغ الذي اقترضه عيسى من صديقه؟

21 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

## مهارات التفكير العليا

22 **أكتشف الخطأ:** أوجد معتز الحد العام للمتتالية: $21, 12, 3, -6, \ldots$ على النحو الآتي:

$$a_1 = 21,\ d = 9$$
$$a_n = 21 + 9n$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ معتز، ثم أُصحِّحه.

23 **تبرير:** أُبيِّن لماذا تُعَدُّ المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty} c$ حسابية، حيث $c$ عدد حقيقي، مُبرِّرًا إجابتي.

24 **تبرير:** أُبيِّن أنَّ مجموع أول $n$ حدًّا من متسلسلة الأعداد الفردية: $(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots)$ هو $n^2$، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 3

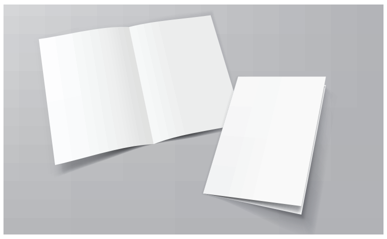
# المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

## Geometric Sequences and Series

**فكرة الدرس** تعرُّف المتتالية الهندسية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية.

**المصطلحات** المتتالية الهندسية، المتسلسلة الهندسية، أساس المتتالية الهندسية، أساس المتسلسلة الهندسية.

**مسألة اليوم** ورقة مقاسها $A4$، وسُمْكها 0.1 mm، طُوِيت من المنتصف، فتضاعف سُمْكها. بافتراض أنَّه يُمكِن طيُّ هذه الورقة 15 مرَّة، أجد السُّمْك الناتج.



**أتعلَّم**

يُمكِن تمييز المتتالية الهندسية بملاحظة ناتج قسمة كل حد فيها على الحد الذي يسبقه.

إذا كانت النسبة ثابتة بين كل حدين متتاليين في متتالية، فإنَّها تُسمّى **متتالية هندسية** (geometric sequence)، وتُسمّى النسبة الثابتة **أساس المتتالية الهندسية** (common ratio)، ويُرمَز إليها بالحرف $r$.

**مفهوم أساسي** **المتتالية الهندسية**

**بالكلمات:** تكون المتتالية هندسية إذا كانت النسبة ثابتة بين كل حد فيها والحد الذي يسبقه.

**بالرموز:** تكون المتتالية: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ هندسية إذا كان:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

**مثال 1**

**أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:**

**1** **32, 16, 8, 4**

أقسم كل حد في المتتالية على الحد السابق له:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

نسبة الحد الثاني إلى الحد الأول

نسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني $\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

نسبة الحد الرابع إلى الحد الثالث $\frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

أُلاحِظ أنَّ النسبة ثابتة، وأنَّها تساوي $\frac{1}{2}$؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $r = \frac{1}{2}$

إذن، المتتالية هندسية.

**2** **80, 40, 30, 10, ...**

أقسم كل حد في المتتالية على الحد السابق له:

نسبة الحد الثاني إلى الحد الأول $\frac{a_2}{a_1} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

نسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني $\frac{a_3}{a_2} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

نسبة الحد الرابع إلى الحد الثالث $\frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

أُلاحِظ أنَّ النسبة غير ثابتة.

إذن، المتتالية: 80, 40, 30, 10, ... ليست هندسية.

### أتحقَّق من فهمي

**أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:**

**a)** 3, 9, 27, 81

**b)** 72, 63, 54, 45...

**أتعلَّم**

تُعَدُّ المتتاليات الأُسِّية من المتتاليات الهندسية.

يُمكِن إيجاد الحد العام $(a_n)$ للمتتالية الهندسية التي حدها الأول $a_1$، وأساسها $r$، باستعمال الصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

## مثال 2

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

**1** $4, 20, 100, 500, \dots$

أُعوِّض قيمة الحد الأول $a_1 = 4$، والأساس $r = \frac{20}{4} = 5$ في صيغة الحد العام:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_n = (4)(5)^{n-1}$ بتعويض $a_1=4, r=5$

إذن، الحد العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = (4)(5)^{n-1}$

**2** $a_5 = 9, r = \frac{1}{3}$

أجد قيمة الحد الأول $a_1$ باستعمال صيغة الحد العام:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_5 = a_1 r^{5-1}$ بتعويض $n=5$

$9 = a_1 (\frac{1}{3})^4$ بتعويض $a_5=9, r=\frac{1}{3}$

$a_1 = 729$ بالتبسيط

أُعوِّض قيمة كلٍّ من $a_1$ و $r$ في صيغة الحد العام:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_n = (729)(\frac{1}{3})^{n-1}$ بتعويض $a_1=729, r=\frac{1}{3}$

إذن، الحد العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = (729)(\frac{1}{3})^{n-1}$

### أتحقَّق من فهمي

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

a) $32, 8, 2, \frac{1}{2}, \dots$

b) $a_5 = 1, r = -\frac{1}{5}$

تنتج **المتسلسلة الهندسية** (geometric series) من جمع حدود المتتالية الهندسية. ويُمكِن إيجاد مجموع أول $n$ حدًّا (يُرمَز إليه بـ $S_n$) من حدود المتسلسلة الهندسية باستعمال الصيغة الآتية:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

حيث:

$a_1$: حد المتسلسلة الأول.

$r \neq 1$: أساس المتسلسلة.

### مثال 3

**أجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{8} 5(2)^{k-1}$.**

أجد الحد الأول $a_1$، والأساس $r$:

$a_k = 5(2)^{k-1}$ الحد العام للمتتالية الهندسية

$a_1 = 5(2)^{1-1}$ أُعوِّض $k=1$ لإيجاد الحد الأول

$= 5(2)^0 = 5$ بالتبسيط، حيث: $2^0=1$

أُقارِن صيغة الحد رقم $k$ بصيغة الحد العام للمتسلسلة الهندسية، فأستنتج أنَّ $r=2$.

أُعوِّض قيمة $a_1=5$، وقيمة $r=2$، وقيمة $n=8$ في صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية:

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية

$S_8 = \frac{5(1-2^8)}{1-2}$ بتعويض $a_1=5, r=2, n=8$

$S_8 = 1275$ بالتبسيط

إذن، مجموع حدود المتسلسلة الهندسية هو 1275.

**أفكِّر**

أجد مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{n} c^k$، حيث $c$ عدد ثابت.

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{6} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

يُمكِن توظيف المتسلسلات الهندسية في إيجاد صيغ رياضية لتطبيقات حياتية.

### مثال 4 : من الحياة

**كرة قدم: شاركت الفِرق الرياضية التي تُمثِّل 64 مدرسة في دوري بطولة كرة القدم. وقد شملت الجولة الأولى 32 مباراة، ثم انخفض عدد المباريات بمقدار النصف في كل جولة تالية:**

**1 أكتب صيغة تُمثِّل عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة بعد $n$ جولة.**

أكتب عدد المباريات في جميع الجولات، بدءًا بالجولة الأولى، فتنتج المتتالية الآتية:

$$32, 16, 8, 4, 2, 1$$

وهي متتالية هندسية، فيها $a_1 = 32$، و $r = \frac{1}{2}$

أجد الحد العام لهذه المتتالية بالتعويض في صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$ صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

$$a_n = (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ بتعويض $a_1=32, r=\frac{1}{2}$

إذن، المتتالية الهندسية التي حدها العام $a_n = (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ تُمثِّل عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة بعد $n$ جولة.

**2 أجد مجموع عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة في جميع جولات هذه البطولة.**

**الخطوة 1:** أكتب المتسلسلة الهندسية التي تُمثِّل مجموع عدد المباريات باستعمال رمز المجموع.

$$\sum_{k=1}^{6} (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

**الخطوة 2:** أُعوِّض قيمة $a_1 = 32$، وقيمة $r = \frac{1}{2}$، وقيمة $n = 6$ في صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية

$$S_6 = \frac{32\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}$$ بتعويض $a_1=32, r=\frac{1}{2}, n=6$

$$S_6 = 63$$ بالتبسيط

إذن، مجموع عدد المباريات بين الفِرق المُشارِكة في جميع جولات هذه البطولة هو 63 مباراة.

**معلومة**

تُعَدُّ كرة القدم أكثر الألعاب شهرة في العالَم؛ إذ يشاهد مبارياتها ملايين البشر حول العالَم.

### أتحقَّق من فهمي

**بدأ سفيان العمل في إحدى الشركات، وبلغ مجموع رواتبه الشهرية في السنة الأولى JD 4500؛ على أنْ يزداد الراتب بنسبة 3.5% سنويًّا بعد العام الأول:**

a) أكتب قاعدة يُمكِن استعمالها لتحديد مجموع رواتب سفيان الشهرية خلال السنة $(n)$.

b) كم دينارًا سيبلغ مجموع رواتب سفيان الشهرية خلال العام الخامس؟

c) إذا استمر سفيان في العمل بهذه الشركة 10 سنوات، فما مجموع رواتبه الشهرية في السنوات العشر؟

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1) $3, -6, 12, -24, \ldots$

2) $2, 6, 18, 54, \ldots$

3) $20, 24, 28.8, \ldots$

4) $-2, 1, 4, 7, \ldots$

5) $0.04, 0.2, 1, \ldots$

6) $100, 90, 81, \ldots$

أجد الحد العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي:

7) $4, -8, 16, -32, \ldots$

8) $0.005, 0.01, 0.02, \ldots$

9) $20, 22, 24.2, 26.62, \ldots$

10) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

11) $a_4 = 108, r = 3$

12) $a_7 = -78125, r = -5$

أجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

13) $\sum_{k=1}^{6} 3(2)^{k-1}$

14) $\sum_{k=1}^{5} \frac{3}{2}(4)^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

16) $\sum_{k=1}^{4} 5(0.1)^{k-1}$

17) $\sum_{k=1}^{5} 7(7)^{k-1}$

18) $\sum_{k=1}^{99} (-1)^{k-1}$

**19** **حواسيب:** اشترت شروق حاسوبًا، واتفقت مع البائع على أنْ تدفع من ثمنه JD 100 في الشهر الأول، ثم تدفع في بقية الشهور ما نسبته 80% من قيمة دُفعة الشهر السابق مدَّة عام كامل. كم دينارًا سعر الحاسوب؟

**استعان خالد بموقع تعليمي في شبكة الإنترنت لقياس مستوى المعرفة لديه، فبدأ بحَلِّ خمسة أسئلة ضمن وقت مُحدَّد لينتقل إلى المرحلة التالية. إذا كان عدد الأسئلة في كل مرحلة تالية مثلي عدد الأسئلة في المرحلة السابقة، فأُجيب عمّا يأتي:**

**20** أكتب صيغة تُمثِّل عدد الأسئلة بعد $n$ مرحلة.

**21** أجد مجموع عدد الأسئلة إذا اجتاز خالد أربع مراحل فقط.

**22** أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

## مهارات التفكير العليا

**23** **تبرير:** أُبيِّن لماذا تُعَدُّ المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty} c$ هندسية، حيث $c$ عدد حقيقي لا يساوي صفرًا، مُبرِّرًا إجابتي.

**24** **تحدٍّ:** إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى من متتالية هندسية هي: $x-4, x, 5x-12$، وكانت جميعها موجبة، فما قيمة $x$؟

**25** **تحدٍّ:** أجد الحد العام للمتتالية الهندسية التي فيها $a_5=-768$، و $a_2=12$.

**26** **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ مجموع أول $n$ حدًّا من متسلسلة هندسية يُعطى بالصيغة الآتية:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

الدرس 4

# المتسلسلات الهندسية اللانهائية

## Infinite Geometric Series

**فكرة الدرس** إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة.

**المصطلحات** المتسلسلة الهندسية اللانهائية، المجموع الجزئي، المتسلسلة المتقاربة، المتسلسلة المتباعدة.

**مسألة اليوم** لدى ماجد شاحن كهربائي مُتنقِّل، يستمر في الشحن مدَّة 8 ساعات إذا كان مشحونًا شحنًا كاملًا. لاحظ ماجد أنَّ الشاحن أخذ يعمل بما نسبته 98% من عدد ساعات الشحن في اليوم السابق له بسبب عطل فيه. كيف يُمكِن تحديد مجموع ساعات عمل هذا الشاحن قبل تعطُّله بصورة كاملة؟

**المتسلسلة الهندسية اللانهائية** (the infinite geometric series) هي متسلسلة تحوي عددًا لانهائيًّا من الحدود، ويُسمّى مجموع أول $n$ حدًّا من حدود هذه المتسلسلة **مجموعًا جزئيًّا** (partial sum)، ويُرمَز إليه بالرمز $(S_n)$، وقد يقترب هذا المجموع من قيمة مُحدَّدة.

### مثال 1

**أجد المجاميع الجزئية $S_n$ للقِيَم: $n = 1, 2, 3, 4, 5$، لكل متسلسلة هندسية لانهائية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:**

**1** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0.88$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0.94$$

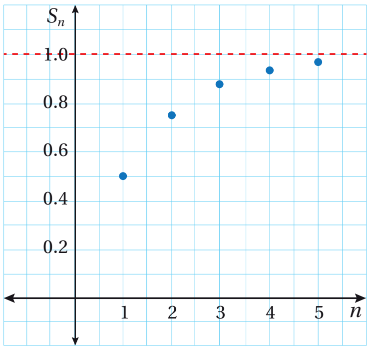
$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0.97$$

> **إرشاد**
> يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا للتمثيل البياني.

بتمثيل الأزواج المُرتَّبة:

(1,0.5),(2,0.75),(3,0.88),(4,0.94),(5,0.97)

في المستوى الإحداثي، أُلاحِظ أنَّه كلَّما زادت قِيَم $n$ اقتربت قِيَم $S_n$ من العدد 1، كما يظهر في التمثيل البياني المجاور.




**2** $1+3+9+27+81+\ldots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+3 = 4$

$S_3 = 1+3+9 = 13$

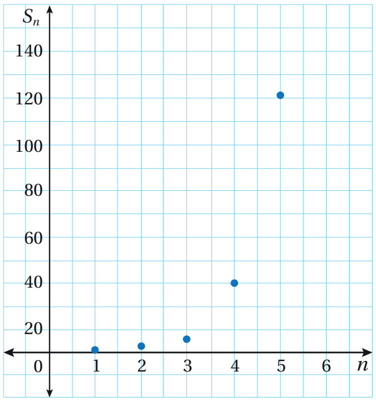
$S_4 = 1+3+9+27 = 40$

$S_5 = 1+3+9+27+81 = 121$

بتمثيل الأزواج المُرتَّبة:

(1,1),(2,4),(3,13),(4,40),(5,121)

في المستوى الإحداثي، أُلاحِظ أنَّه كلَّما زادت قِيَم $n$ زادت قِيَم $S_n$ إلى ما لانهاية، دون أنْ تقترب من أيِّ قيمة مُحدَّدة.




### أتحقَّق من فهمي

**أجد المجاميع الجزئية $S_n$ للقِيَم: $n = 1, 2, 3, 4, 5$، لكل متسلسلة هندسية لانهائية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:**

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots$

b) $2+2+2+2+2+\ldots$

لاحظْتُ في المثال السابق أنَّ المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية في الفرع الأول تقترب من العدد 1 عند زيادة قِيَم $n$؛ لذا فإنَّ هذه المتسلسلة تُسمّى **متسلسلة متقاربة** (convergent series)، ويُمكِن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدودها. لاحظْتُ أيضًا أنَّ المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية في الفرع الثاني لا تقترب من عدد مُعيَّن عند زيادة قِيَم $n$؛ لذا فإنَّ هذه المتسلسلة تُسمّى **متسلسلة متباعدة** (divergent series)، ولا يُمكِن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدودها.

## مفهوم أساسي

### المتسلسلة الهندسية اللانهائية

**بالكلمات:** تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متقاربة إذا كانت القيمة المطلقة لأساسها أقل من 1، وتكون متباعدة إذا كانت القيمة المطلقة لأساسها أكبر من أو تساوي 1

**بالرموز :**

إذا كانت $|r|<1$، فإنَّ المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون متقاربة.

إذا كانت $|r|\geq 1$، فإنَّ المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون متباعدة.

إذا كانت $|r| < 1$ لمتسلسلة هندسية لانهائية ($n$ تقترب من $\infty$)، فإنَّ قيمة $r^n$ في صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة تقترب من 0.

وبذلك، فإنَّ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية تصبح كما يأتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

### مثال 2

**أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:**

**1** $\mathbf{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots}$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

بما أنَّ $\frac{1}{4}<1$ = $|\frac{1}{4}|$، فإنَّ المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$ بتعويض $a_1=1, r=\frac{1}{4}$

$$= \frac{4}{3}$$ بالتبسيط

إذن، مجموع المتسلسلة هو $\frac{4}{3}$

**2** $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\dots$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

$$r = \frac{-\frac{3}{2}}{1} = -\frac{3}{2}$$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

بما أنَّ $\frac{3}{2}>1$ = $|-\frac{3}{2}|$، فإنَّ المتسلسلة متباعدة، ولا يُمكِن إيجاد مجموع حدودها.

**3** $\sum_{k=1}^{\infty} 2(0.9)^{k-1}$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

$$a_1 = 2(0.9)^{1-1} = 2$$ بتعويض $k=1$

$$a_2 = 2(0.9)^{2-1} = 1.8$$ بتعويض $k=2$

$$r = \frac{1.8}{2} = 0.9$$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

بما أنَّ $0.9<1$ = $|0.9|$، فإنَّ المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$S_\infty = \frac{2}{1-0.9}$$ بتعويض $a_1=2, r=0.9$

$$S_\infty = 20$$ بالتبسيط

إذن، مجموع المتسلسلة هو 20.

**أتعلّم**

للتحقُّق من إجابة الفرع الأول من المثال الثاني، فإنَّني أُمثِّل بعض المجاميع الجزئية للمتسلسلة بيانيًّا.

### أتحقَّق من فهمي

**أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الهندسـية اللانهائية الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:**

a) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\ldots$

b) $1-2+4-8+\ldots$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} 9(-0.3)^{k-1}$

يُمكِن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لكتابة العدد العشري الدوري في صورة كسر عادي.

**أتذكَّر**

العدد العشري الدوري هو عـدد نسـبي؛ لذا يُمكِن كتابته في صورة كسر عادي $\frac{a}{b}$، حيث $a, b$ عددان صحيحان، و$b\neq0$.

### مثال 3

**أكتب العدد العشري الدوري $0.\overline{57}$ في صورة كسر عادي.**

يُمكِن كتابة الكسر العشري الدوري على النحو الآتي:

$$0.\overline{57}=0.575757\ldots$$

أيْ إنَّ:

$$0.\overline{57}=0.57+0.0057+0.000057+\cdots$$ الصيغة التحليلية للكسر العشري

$$0.\overline{57}=\frac{57}{100}+\frac{57}{10000}+\frac{57}{1000000}+\cdots$$ بإعـادة كتابة الأجـزاء العشـرية المُتكرِّرة بوصفها كسورًا عاديةً

وهذا يُمثِّل متسلسلة لانهائية، حدها الأول $a_1=\frac{57}{100}$، ويُمكِن إيجاد أساسها كما يأتي:

$$\frac{57}{10000}\div\frac{57}{100}=\frac{1}{100}$$ بقسمة الحد الثاني على الحد الأول

أيْ إنَّ أساس هذه المتسلسلة الهندسية اللانهائية هو: $r=\frac{1}{100}=0.01$

بما أنَّ $|0.01|=0.01<1$، فإنَّ هذه المتسلسلـة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

بتعويض $a_1=0.57,\ r=0.01$

$$= \frac{0.57}{1-0.01}$$

بالتبسيط

$$S_\infty = \frac{19}{33}$$

أيْ إنَّ:

$$0.\overline{57} = 0.575757\ldots = \frac{19}{33}$$

**أتحقَّق من فهمي**

**أكتب العدد العشري الدوري $0.\overline{14}$ في صورة كسر عادي.**

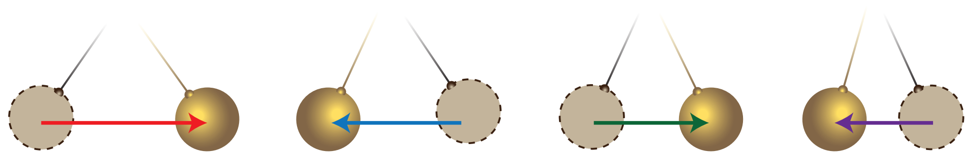
**معلومة**

البندول هو جسم يرتبط بنقطة ثابتة بواسطة خيط، ويتحرَّك في مستوى واحد.

يُمكِن استعمال المتسلسلات الهندسية اللانهائية لحساب مجموع المسافات التي يقطعها البندول المُتحرِّك ذهابًا وإيابًا حتى يتوقَّف عن التأرجح؛ إذ يصعب إيجاد مجموع هذه المسافات من دون استعمال المتسلسلات؛ لأنَّها قبل التوقُّف عن التأرجح تصبح متناهية الصغر، وعددها كبير جدًّا.

## مثال 4 : من الحياة

فيزياء: **حرَّكت شيماء البندول في مختبر العلوم، وقد لاحظت أنَّه قطع مسافة 45 cm بين أقصى نقطتين وصلهما في المرَّة الأولى كما في الشكل الآتي، ثم قطع في كل مرَّة تالية 77% من المسافة التي قطعها في المرَّة السابقة، أجد مجموع المسافات التي قطعها البندول في أثناء تأرجحه حتى توقَّف عن ذلك.**




أُلاحِظ أنَّ مجموع المسافات التي قطعها البندول هو:

$$45 + 45(0.77) + 45(0.77)^2 + 45(0.77)^3 + \cdots$$

يُمثِّل هذا المجموع متسلسلة هندسية لانهائية، حدها الأول $a_1 = 45$، وأساسها

$$r = \frac{45(0.77)}{45} = 0.77$$

بما أنَّ $|0.77| = 0.77 < 1$، فإنَّ هذه المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$= \frac{45}{1-0.77}$$ بتعويض $a_1=45, r=0.77$

$$= \frac{4500}{23} \approx 195.7$$ بالتبسيط، واستعمال الآلة الحاسبة

إذن، قطع البندول مسافة 195.7 cm تقريبًا في أثناء تأرجحه إلى أنْ توقَّف.

### أتحقَّق من فهمي

**أراجيح:** دفع هُمام أرجوحة ابنته، فلاحظ أنَّها قطعت مسافة **2 m** بين أبعد نقطتين تصلهما، ثم قطعت في كل مرَّة تالية **95%** من المسافة التي قطعتها في المرَّة السابقة. أجد مجموع المسافات التي قطعتها الأرجوحة حتى توقَّفت عن الحركة.

## أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد المجاميع الجزئية $S_n$ لقِيَم $n$ الصحيحة، حيث $1 \le n \le 6$، لكلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية، ثم أُمثِّلها بيانيًّا:

1) $24 + 12 + 6 + 3 + \ldots$

2) $2 + 8 + 32 + 128 + \ldots$

3) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$

4) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots$

5) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

6) $343 + 49 + 7 + 1 + \ldots$

أُحدِّد إذا كانت المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية متقاربة أم متباعدة، ثم أجد المجموع للمتقاربة منها:

7) $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \ldots$

8) $2 + \frac{7}{3} + \frac{49}{18} + \frac{343}{108} + \ldots$

9) $5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} + \ldots$

10) $10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots$

11) $192 + 48 + 12 + 3 + \ldots$

12) $1 + 0.35 + 0.1225 + 0.042875 + \ldots$

أكتب كُلًّا من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر عادي:

**13** $0.\overline{7}$

**14** $0.\overline{41}$

**15** $0.\overline{4}$

**16** $0.\overline{05}$

**17** $0.\overline{86}$

**18** $0.\overline{3}$

**كرات:** سـقطت كرة مطّاطية من ارتفاع $20\ m$ رأسيًّا في اتجاه أرض أفقية. وعند اصطدامها بالأرض ارتدَّت إلى أعلى مسافة تُعادِل ما نسبته 70% من الارتفاع الذي سقطت منه في المرَّة السابقة. بافتراض أنَّ الكرة سقطت رأسيًّا ثم ارتدَّت رأسيًّا عددًا لانهائيًّا من المرّات:

**19** أجد الحد العام $a_n$ الذي يُمثِّل المسافة التي قطعتها الكرة عندما ارتدَّت عن الأرض للمرَّة $n$.

**20** أجد $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

**21** **مـراوح:** تدور مروحة بسـرعة مقدارهـا 12 دورة في الثانيـة الواحدة. وعنـد فصل التيار الكهربائي عنها تتباطأ سـرعتها بما نسـبته 75% من دوراتها في كل ثانية لاحقة. أجد عدد الدورات التي ستدورها المروحة قبل أنْ تتوقَّف عن الدوران بصورة كلية.

**22** أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

## مهارات التفكير العليا

**23** **أكتشف الخطأ:** أوجد سفيان قيمة: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ على النحو الآتي:

$$a_1 = 1, \quad r = \frac{5}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سفيان، ثم أُصحِّحه.

**24** **مسألة مفتوحة:** أجد متسلسلة هندسية لانهائية مجموعها 6، مُبرِّرًا إجابتي.

**25** **تحدٍّ:** إذا كان الحد الأول لمتسلسـلة هندسـية لانهائية متقاربة هو $a$ حيث $a > 0$، والحد الثالث فيها هو 4، فأجد جميع الاحتمالات المُمكِنة لمجموع المتسلسلة بدلالة $a$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{5}(2k^2-3)$ هو:

a) 85 b) 90

c) 95 d) 96

2 المتسلسلة الحسابية ممّا يأتي هي:

a) $6+12+24+\dots$ b) $8+24+72+\dots$

c) $-3-8-15-\dots$ d) $-5-3-1-\dots$

3 إحدى الآتية تُمثِّل المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty}(k^3-k^2)$:

a) $0+1+8+27+\dots$ b) $0+4+18+48+\dots$

c) $0+1+4+9+\dots$ d) $0+4-18+48-\dots$

4 قيمة $S_6$ للمتسلسلة: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ هي:

a) 0 b) $\frac{63}{32}$

c) 1 d) 2

5 المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتباعدة ممّا يأتي هي:

a) $0.2+0.4+0.8+..$ b) $2+\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{125}+..$

c) $0.6+0.3+0.15+..$ d) $640+160+40+..$

أُصنِّف المتسلسلات الآتية إلى حسابية وهندسية:

6 $20+25+30+35+\dots$

7 $4+16+64+\dots$

8 $24+12+6+3+\dots$

9 $120+111+102+93+\dots$

10 $9+11.5+14+16.5+\dots$

11 $6-4+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}+\cdots$

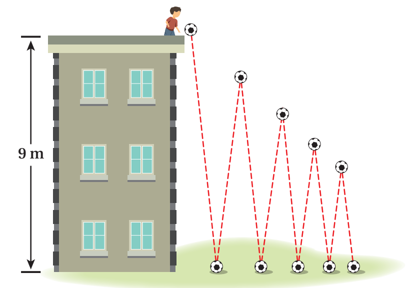
12 إذا كان مجموع أول $n$ حدًّا من حدود متسلسلة هو $6n^2+8n$، فأُثبِت أنَّ هذه المتسلسلة حسابية.

13 إذا كان الحد العاشر في متسلسلة حسابية يساوي مثلي الحد الرابع فيها، وكان الحد الثامن عشر فيها يساوي 50، فأجد حدها العام.

14 وفَّرت صفاء JD 2000 من راتبها في السنة الأولى من عملها، ثم أخذت تُخطِّط لتوفير 25% أكثر ممّا وفَّرته في كل سنة لاحقة. أكتب متسلسلة تُمثِّل مجموع ما ستُوفِّره صفاء، ثم أجد مجموع ما ستُوفِّره في أول 9 سنوات من بدء عملها.

**15** يتمرَّن جمال على تحسين خطِّه في الكتابة. إذا كتب في اليوم الأول خمس صفحات، ثم كتب في كل يوم تالٍ أكثر بصفحتين من اليوم الذي قبله، فأجد عدد الصفحات التي كتبها في خمسة عشر يومًا.

**رمى سهيل كرة من ارتفاع 9 m في اتجاه أرض أفقية، وقد لاحظ أنَّ الكرة ترتد في كل مرَّة بما نسبته 75% من ارتفاعها في المرَّة السابقة:**




**16** أجد الارتفاع الذي سترتد إليه الكرة بعد اصطدامها بالأرض للمرَّة الرابعة.

**17** أجد الارتفاع الذي سترتد إليه الكرة بعد اصطدامها بالأرض للمرَّة $n$.

**18** كم مرَّةً ستصطدم الكرة بالأرض قبل أنْ يصبح ارتفاع ارتدادها أقل من 1 m؟

**19** أجد مجموع الارتفاعات التي ارتدَّتها الكرة حتى استقرَّت بصورة كاملة على الأرض.

**20** بلغ راتب بكر في السنة الأولى من عمله JD 2700. إذا زاد راتبه بنسبة 3% في كل سنة لاحقة عن السنة التي سبقتها، فما مجموع رواتبه في أول 10 سنوات من العمل؟

**21** لدى مروة حوض لتربية الأسماك، فيه 200 سمكة، وقد لاحظت نفوق 7 منها يوميًّا على مدار 10 أيام. أُعبِّر عن عدد الأسماك التي نفقت بمتسلسلة.

## تدريب على الاختبارات الدولية

**22** مجموع أول $n$ حدًّا من الأعداد الزوجية هو:

a) $n$ b) $2n$

c) $n^2+n$ d) $n^2$

**23** إذا كان الحد الأول لمتسلسلة حسابية هو $a$، وأساسها هو $d$، ومجموع الحد السادس والحد السابع والحد الثامن فيها هو 12، فإنَّ قيمة $a$ هي:

a) 12 b) 4

c) $4-6d$ d) $4+6d$

**24** إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى لمتسلسلة هندسية لانهائية هي: $6p+2, 4p+4, 3p+3$، حيث $p \neq 0$، فإنَّ مجموع هذه المتسلسلة هو:

a) 128 b) 5

c) 32 d) 1